ALLOKATION IM MARKTWIRTSCHAFTLICHEN SYSTEM

HEINZ KÖNIG (Hrsg.)

KONTROLL-THEORETISCHE ANSÄTZE IN MAKRO-ÖKONOMETRISCHEN MODELLEN



ALLOKATION IM MARKTWIRTSCHAFTLICHEN SYSTEM

HEINZ KÖNIG (Hrsg.)

KONTROLLTHEORETISCHE ANSÄTZE IN MAKROÖKONOMETRISCHEN MODELLEN

Der vorliegende Band behandelt einige Problembereiche in der Anwendung der stochastischen Kontrolltheorie in Verbindung mit makroökonometrischen Modellen:

- die Bedeutung während des Planungszeitraums zusätzlich anfallender Informationen für die Aufstellung optimaler Entscheidungsregeln,
- die Evaluierung von Kostenfunktionalen deterministischer und stochastischer Art,
- die Sensitivität optimaler "feed-back"-Regeln bei Variation der Parameter einer wirtschaftspolitischen Zielfunktion.

Die empirische Anwendung basiert auf einfachen ökonometrischen Modellen für die Bundesrepublik Deutschland.

Wille, Eberhard, Prof. Dr., geb. 1942 in Berlin. Dipl.-Examen 1966 Universität Bonn; Promotion 1969 Universität Mainz, Habilitation 1973 Universität Mainz; seit 1975 Ordinarius an der Universität Mannheim. Mitglied des Finanzwissenschaftlichen Ausschusses des Vereins für Socialpolitik, der Gesellschaft für öffentliche Wirtschaft und Gemeinwirtschaft, des Institut International de Finances Publiques, der Public Choice Society; Sprecher des Sonderforschungsbereiches 5; Mitglied des Wissenschaftlichen Beirats beim Bundesministerium für Wirtschaft.

Retrodigitization in 2018

www.peterlang.com

Kontrolltheoretische Ansätze in makroökonometrischen Modellen

STAATLICHE ALLOKATIONSPOLITIK IM MARKTWIRTSCHAFTLICHEN SYSTEM

Herausgegeben von
Klaus Conrad, Heinz König, Hans-Heinrich Nachtkamp,
Rüdiger Pethig, Ulrich Schlieper, Horst Siebert, Eberhard Wille

Band 18



Verlag Peter Lang
Frankfurt am Main · Bern · New York

HEINZ KÖNIG (Hrsg.)

KONTROLL-THEORETISCHE ANSÄTZE IN MAKRO-ÖKONOMETRISCHEN MODELLEN



Verlag Peter Lang
Frankfurt am Main · Bern · New York

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kontrolltheoretische Ansätze in makroökonometrischen Modellen / Heinz König (Hrsg.). – Frankfurt am Main ; Bern ; New York : Lang, 1985.
(Staatliche Allokationspolitik im marktwirtschaftlichen System ; Bd. 18)
ISBN 3-8204-8314-4
NE: König, Heinz [Hrsg.]; GT



This book is available Open Access thanks to the kind support of ZBW – Leibniz-Informationszentrum Wirtschaft.

Diese Arbeit ist im Sonderforschungsbereich 5, "Staatliche Allokationspolitik" Mannheim entstanden und wurde auf seine Veranlassung unter Verwendung der ihm von der Deutschen Forschungsgemeinschaft zur Verfügung gestellten Mittel gedruckt.

ISSN 0721-2860
ISBN 3-8204-8314-4
ISBN 978-3-631-75583-9 (eBook)

Druck und Bindung: Weihert-Druck GmbH, Darmstadt

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Sonderforschungsbereich 5 hat in seinem Symposium "Intertemporale Allokationen" Anfang 1984 im Kontext verschiedener Problembereiche die Relevanz optimaler Kontrollansätze zur Beurteilung der intertemporalen Interdependenzen wirtschaftlicher Entscheidungen zur Diskussion gestellt. Die Hamilton-Funktion als "performance"-Indikator erwies sich dabei als ein ebenso unersetzliches Requisit wie der Begriff der Nutzungskosten als Opportunitätskosten der Zukunft. Interdependente Zusammenhänge lassen sich formal nur mit einem adäquaten Instrumentarium behandeln. Ein Rückgriff auf die komparative Statik der Lehrbuchökonomie mag zwar häufig als leichter "einsichtig" erscheinen, schließt aber auch Fehlurteile nicht aus. Das gleiche gilt für die Beurteilung der intertemporalen Wirkungsweise wirtschaftspolitischer Maßnahmen, wenn nur der deterministische Teil eines Modells Verwendung findet und die stochastischen Komponenten vernachlässigt werden.

Die Notwendigkeit, insbesondere bei Politiksimulationen mit makroökonomischen Modellen explizit stochastische Elemente zu berücksichtigen, läßt sich aus den verschiedenen Fehlerursachen von Entscheidungsmodellen begründen:

1. Aus den Unsicherheitseffekten des ökonometrischen Modells per se, so Fehler in den Gleichungen - also der Einfluß nichtmodellierter Variablen auf das Modellverhalten -, Meß oder Beobachtungsfehler in den Variablen oder zeitvarianter stochastischer Parameter. Die Vernachlässigung des Einflusses stochastischer Elemente kann kurzfristig falsche Zustandsentwicklungen implizieren, die dann als Grundlage für eine Bestimmung des optimalen Einsatzes wirtschaftspolitischer Instrumente ungeeignet sind. Die klassische

Studie von Adelmann und Adelmann über das Konjunkturverhalten des Klein-Goldberger-Modells mag als Hinweis dienen.

2. Die Bezugnahme auf eine Zielfunktion verlangt Informationen über die Präferenzstruktur der Entscheidungsträger, die in der Regel unvollkommen und ungenau nicht nur bezüglich der funktionalen Form, sondern auch hinsichtlich der Bewertung der einzelnen Ziele und bezüglich der Länge des Planungshorizonts sind. Und schließlich sind die Informationen über den (zukünftigen) Verlauf exogener Variablen unsicher, gleich ob es sich um echte exogene Größen oder von Entscheidungsträgern gewünschte Zielpfade handelt.

Der vorliegende Band behandelt einige Problembereiche der Kontrolltheorie und ihrer Anwendung in der Ökonomie, die bei dem eingangs erwähnten Symposium nicht oder nur am Rande angesprochen wurden und die stochastische Aspekte von Entscheidungsmodellen zum Gegenstand haben.

- Die Bedeutung während des Planungszeitraums zusätzlich anfallender Informationen für die Aufstellung optimaler Entscheidungsregeln, insbesondere Lerneffekte bezüglich der stochastischen Eigenschaften des ökonometrischen Modells,

- die Evaluierung der deterministischen und stochastischen Komponenten von Kostenfunktionalen, dargestellt anhand der Philipps-Kurven-Problematik für die Bundesrepublik Deutschland, und

- die Sensitivität optimaler feed-back-Regeln bei Variation der Parameter einer Zielfunktion, wiederum an- - hand eines einfachen makroökonomischen Modells für die Bundesrepublik Deutschland.

Ausgangspunkt dieser Untersuchungen ist immer ein makroökonomisches Modell, so daß einige kurze Bemerkungen zur Anwendbarkeit dieser Modelle im kontrolltheoretischen Kontext angebracht erscheinen. Trotz mancher grundsätzlicher Dispute über die Modellierbarkeit ökonomischer Verhaltensweisen mittels aggregierter Funktionalzusammenhänge bilden zwar makroökonometrische Modelle auch heute noch eines der wichtigen Hilfsmittel zur Konjunkturdiagnose und -prognose, ihre Anwendbarkeit zur Bestimmung optimaler Politiken wird aber insbesondere in Verbindung mit der Theorie rationaler Erwartungen der Wirtschaftssubjekte angezweifelt. So kommt vor allem Lucas zu der Auffassung, daß im Falle rationaler Erwartungen makroökonometrische Modelle und darauf basierende kontrolltheoretische Verfahren völlig wertlos seien, da die Strukturgleichungen nicht invariant gegenüber den Zukunftserwartungen der Wirtschaftssubjekte seien. Einwände gegen diese Kritik dürfen sich dabei nicht mit dem Hinweis begnügen, die Hypothese rationaler Erwartungen sei wirklichkeitsfremd. Wie Kykland und Prescott gezeigt haben, genügt zur Abstützung des Lucas'schen Arguments, daß Wirtschaftssubjekte in etwa die Wirkungsweise wirtschaftspolitischer Maßnahmen abschätzen können.

Sims hat die Gegenargumente sehr ausführlich dargelegt, so daß hier nur kurz darauf eingegangen werden muß. Sicherlich ist es richtig, daß der Wirkungsgrad spezifischer wirtschaftspolitischer Maßnahmen gegen Null konvergiert, wenn diese so ausgestaltet sind, daß die Wirtschaftssubjekte sie durch eine entsprechende Veränderung ihrer Verhaltensweise konterkarieren können. Als typisches Beispiel mag die rückzahlbare Ergänzungsabgabe zur Einkommensteuer dienen, die eine intertemporale Umschichtung in der Ersparnisbildung zur Folge hatte und nicht die geplante Reduktion der privaten Konsumnachfrage bewirkte. Andererseits ist jedoch ebenso zutreffend, daß zahlreiche wirt-

schaftspolitische Maßnahmen in ihren Auswirkungen für die betroffenen Wirtschaftssubjekte (und häufig auch für den Entscheidungsträger) nicht unmittelbar erkennbar sind; sei es, weil sie von unterschiedlichen und zum Teil in ihren Zielvorstellungen konträr handelnden Entscheidungsträgern getroffen werden, sei es, weil sie wegen überlappender Wahlperioden nicht auf ihren langfristigen Effekt, sondern zur Durchsetzung kurzfristiger politischer Ziele angesetzt waren, oder sei es auch, daß die Öffentlichkeit zwar die Wirkungsweise spezifischer aber nicht allgemeiner wirtschaftspolitischer Maßnahmen erkennt. "And since the public always understands particular causes better than general causes the depression which will be attributed to the industrial disputes which will accompany it, ... to anything in the world accept the general monetary policy which has that the whole thing going." Vielleicht gilt diese Aussage von Keynes trotz der Verfeinerung des theoretischen Instrumentariums auch heute noch.

Wie immer man auch zur Anwendbarkeit makroökonomischer Modelle für die Politikberatung steht, auch im theoretisch-methodischen Bereich sind noch eine Vielzahl von Problemen ungeklärt. Das gilt zum einen für die Frage, welche Bedeutung im Planungszeitraum neu anfallende Informationen in ihren Auswirkungen auf die optimalen Entscheidungsregeln besitzen. In der gängigen Version von Entscheidungsmodellen - deterministischer oder stochastischer Art - wird im allgemeinen unterstellt, daß für die Ableitung der Entscheidungsregeln nur die zu Planungsbeginn vorhandene Information verwendet wird. Daß diese Annahme wirklichkeitsfremd ist, muß nicht besonders betont werden. Frommholz untersucht in seinem Beitrag die Bedeutung von Lernprozessen bezüglich der stochastischen Größen eines Modells. Dabei handelt es sich nicht nur um passive Lernprozesse, also eine Neuschätzung der Strukturgleichungen eines Modells auf Grund zusätzlicher Informationen,

sondern auch um aktive Lerneffekte über die Stochastik des Modells. Der Beitrag behandelt unter anderem Probleme der adaptiven Kovarianzkontrolle, wobei gezeigt werden kann, daß adaptive Entscheidungsregeln andere Verläufe der Instrumentvariablen implizieren, wie sie beispielsweise von Chow dargestellt wurden. Der Beitrag untersucht weiterhin approximative Kontrollalgorithmen und Verfahren einer adaptiven "closed loop"-Kontrolle, die eine Zerlegung des Kontrollproblems in drei Komponente zuläßt.

Franz, Kempf und Kräger behandeln in ihrem Beitrag insbesondere die Frage, welche Bedeutung der stochastischen Komponente bei der Evaluation der Entscheidungsregeln zukommt. Ausgangspunkt ist ein ökonometrisches Modell des Arbeitsmarktes der Bundesrepublik Deutschland, das um eine Strukturgleichung für die Preisbestimmung ergänzt wird. Als Kostenfunktional dienen die quadrierten Abweichungen der Inflationsrate und Arbeitslosenquote von im Zeitablauf vorgegebenen Zielwerten, so daß der trade-off entsprechend der Philipps-Kurve berechnet werden kann. Als wesentliche Erkenntnis dieses "Beispiels" ist festzuhalten, daß der stochastische Anteil an den Gesamtkosten sehr hoch ist und ohne eine Berücksichtigung der Restgrößen die Beurteilung dieses trade-offs zu Trugschlüssen führen kann.

Im letzten Beitrag untersuchen Frommholz und Wolters die Sensitivität optimaler Politiken bei einer Veränderung der Parameter der Zielfunktion. Grundlage dafür ist ein von Frowen und Arestis für die Bundesrepublik Deutschland geschätztes Modell. Als wichtigstes Ergebnis zeigt sich, daß eine Variation des Planungshorizonts für die optimalen Pfade von untergeordneter Bedeutung ist, die Auswahl der Zielpfade jedoch einen außergewöhnlich großen Einfluß besitzt.

Die in diesem Band veröffentlichten Studien wurden im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützen Projektes "Stochastische Stabilisierungspolitik" angefertigt, dessen Arbeit eng mit Projekten des Sonderforschungsbereichs 5 verbunden ist. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für die großzügige Förderung gedankt. Den Autoren dieses Bandes gebührt mein besonderer Dank für die zahlreichen Stunden fruchtbarer Diskussion. Insbesondere schulden wir aber alle unseren Dank Frau Böhm, Frau Burst und Frau Räuchle, die das Manuskript in einer vorzüglichen Weise fertiggestellt haben.

Heinz König

Adaptive Entscheidungsmodelle

Harald Frommholz

---

1. Überblick über adaptive Entscheidungsmodelle

1.1 Allgemeine Bemerkungen

In den einfachen Entscheidungsmodellen (deterministischen sowie stochastischen) geht man stets von der Voraussetzung aus, daß bei der Ableitung der optimalen Entscheidungsregel nur Informationen verwendet werden, die schon am Anfang des Planungszeitraumes verfügbar sind; zusätzliche Informationen, die während des Optimierungszeitraumes anfallen, werden dabei nicht berücksichtigt.

Die adaptiven Entscheidungsregeln werden dagegen durch die Einbeziehung aktueller (im Planungszeitraum anfallender) Informationen bei der Auswahl der optimalen Kontrollregeln charakterisiert; sie können deshalb auch als Weiterentwicklung bzw. Verallgemeinerung der stochastischen Optimierungsmodelle aufgefaßt werden. Im Zeitablauf findet hier für den Entscheidungsträger ein Lernprozeß bezüglich der stochastischen Größen des Modells statt. Die Berücksichtigung tatsächlicher Realisationen der Zufallsgrößen bzw. die Adaption zukünftiger Beobachtungen stellt gegen-

über dem einfachen stochastischen Entscheidungsmodell, das nur additive Störterme erfaßt, einen Informationsgewinn dar, der zu einer Verbesserung der optimalen Politik genutzt werden kann. Durch die Steuerung der Politikvariablen kann hierbei eine Beeinflussung des Informationsgewinns stattfinden.

Die Notwendigkeit adaptiver Kontrolle wird häufig damit begründet [siehe Rausser und Hochman (1979)], daß die Einführung eines neuen Systems i.a. unbekannte Parameter impliziert, so z.B. bei der Nachfragefunktion eines auf dem Markt neu eingeführten Produktes oder bei einer Produktionsfunktion bezüglich einer neuen Technologie. In vielen Fällen kann auch angenommen werden, daß die Parameter eines schon etablierten Systems im Zeitablauf variieren. Die Einbeziehung des zeitlichen Verlaufs der Parameter sollte aber bei der Ableitung der optimalen Kontrolle mit einbezogen werden, um eine bessere Politik zu ermöglichen. Weiterhin kann der Politikeinsatz das zugrundeliegende ökonometrische Modell so beeinflussen, daß die geschätzten Parameter, d.h. die Systemdarstellung, für den Optimierungszeitraum nicht mehr adäquat sind und deshalb adaptive Kontrollmethoden erfordern.

Im deterministischen Entscheidungsmodell impliziert die Einbeziehung zusätzlicher Informationen bei der Bestimmung der optimalen Politik keine verbesserte Entscheidungsregel, da die zukünftigen Realisationen der Systemzustände mit Sicherheit schon zu Beginn des Planungszeitraumes bekannt sind, wenn gleichzeitig eine konstante Modellstruktur unterstellt wird, d. h. für das deterministische Entscheidungsmodell ist kein Informationsgewinn während des Optimierungszeitraumes möglich; dies impliziert, daß alle Entscheidungssysteme für das deterministische Problem identisch sind.

Die verschiedenen stochastischen Entscheidungsregeln unterscheiden sich hinsichtlich der zur Bestimmung der optimalen Politiken verwendeten Informationsmenge bzw. Informationsniveaus, d.h. bezüglich der Verfügbarkeit und Einbeziehung vergangener und möglicher zukünftiger Beobachtungen.
Ist die Lernmöglichkeit im Planungszeitraum, verglichen mit dem Informationszustand zu Beginn der Optimierung, zu gering - dies kann der Fall sein, wenn der Optimierungszeitraum im Vergleich zum zugrundeliegenden Beobachtungszeitraum (Schätzzeitraum) sehr kurz ist -, so ist die Entscheidungsregel des einfachen stochastischen Modells annähernd optimal für das adaptive Modell.

1.2 Passive adaptive Entscheidungsmodelle

In der Literatur [vgl. Rausser und Hochman (1979) und Kendrick (1981)] wird nach passiven und aktiven adaptiven Kontrollregeln unterschieden. Chow (1975) spricht in diesem Zusammenhang auch von Entscheidungsmodellen mit passiven bzw. aktiven Lerneffekten.

Im allgemeinen liegt passives Lernen vor, wenn die unbekannten Parameter des Systems nach jeder Realisation im Zeitablauf neu geschätzt werden. Dieser "passive" Lerneffekt ist unabhängig von der Bestimmung der optimalen Politik, das angewandte Optimierungsverfahren bleibt erhalten. Die Berücksichtigung dieser Lernmöglichkeit impliziert für die praktische Vorgehensweise, daß nach der Berechnung der optimalen Entscheidung der ersten Periode die Parameterschätzungen des Modells aufgrund des neu realisierten Systemzustandes der ersten Periode revidiert werden. Mit Hilfe zusätzlicher Beobachtungen können so die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Parameter aktualisiert werden, man spricht auch vom "updaten"; verschiedene

Methoden können hierzu herangezogen werden, so z.B. Bayesianische Methoden (Zellner, 1971), Revisionsmethoden der Kleinsten Quadrate (Albert und Sittler, 1965) und Kalman Filter (Kalman, 1960).
Anschließend wird dann erst mit der aktualisierten Verteilung der Parameter die optimale Entscheidung der zweiten Periode bestimmt.

Die Berechnung der passiven adaptiven Entscheidungsregeln besteht demzufolge aus zwei unterschiedlichen Prozeduren: einem Optimierungsansatz, der zu jedem Zeitpunkt die optimale Politik auswählt, und einer Prozedur, die zu jedem Zeitpunkt die Parameterschätzungen revidiert.[1)]

Unterschiedliche Optimierungsansätze implizieren alternative stochastische Kontrollmethoden. Wenn die Unsicherheit bezüglich der Parameter vernachlässigt wird, spricht man von "sequential certainty equivalence", "update certainty equivalence" (Rausser, 1977) oder von "heuristic certainty equivalence" (Norman, 1976). Werden dagegen die Parameterunsicherheiten bei der Ableitung der optimalen Kontrolle zu jedem Zeitpunkt berücksichtigt, so erhalten wir die sogenannte "open-loop feedback"-Methode [vergleiche auch Kendrick (1981)].

Eine noch speziellere Klassifikation stochastischer Entscheidungsmodelle nimmt Rausser (1977) vor; bei Modellen mit Parameterunsicherheit unterscheidet er zwischen "open-loop feedback"-Regeln und "sequential stochastic control". Als "sequential stochastic control" bezeichnet er

---

1)Methodisch werden die passiven adaptiven Entscheidungsregeln durch die Annahme charakterisiert, daß die stochastischen Parameter in jedem Optimierungsschritt unabhängig verteilt sind. Durch einen bestimmten Instrumenteneinsatz kann keine gezielte Veränderung bzw. Steuerung der Verteilungsinformation vorgenommen werden.

Kontrollmethoden, die zwar bei der Optimierung zukünftige Beobachtungen einbeziehen, diese aber nicht zur Anpassung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Parameter verwenden. (Vergleiche hierzu Chow (1975), Rausser und Freebairn (1974), Zellner (1971) und Prescott (1971)). "Open-loop feedback"-Regeln werden bei Aoki (1967), Bar-Shalom und Silvan (1969), Curry (1969), Ku und Athans (1973) und Tse und Athans (1972) behandelt.

Zu den bisher vorgestellten Entscheidungsmodellen wird nach der Implementierung der jeweils ersten Entscheidung mit einem um eine Periode verkürzten Planungszeitraum die nachfolgende optimale Politik bestimmt. Eine alternative Vorgehensweise stellt die Annahme eines konstanten Optimierungszeitraumes dar. Der Planungszeitraum wird nach jedem Optimierungsschritt um eine Periode verschoben, so daß stets ein Entscheidungsproblem mit einem gleichlangen Planungszeitraum gelöst werden muß. Es ist hierbei aber zu beachten,daß jeweils eine neue Zielfunktion zu spezifizieren ist. In der Literatur wird dieses Problem als "rolling-horizon"-Verfahren bezeichnet (s. Theil, 1964).

Eine weitere Klasse von Entscheidungsregeln wird durch die "m-measurement"-Politiken dargestellt [Rausser und Hochman (1979) sowie Pekelman und Rausser (1978)]. Hierbei wird unterstellt, daß der Entscheidungsträger neben den gegenwärtigen Beobachtungen und Informationen auch die m folgenden Beobachtungen zur Ableitung der optimalen Entscheidung verarbeitet. Färber (1981) unterscheidet in diesem Zusammenhang die einfache "m-measurement"-Politik, wobei die optimalen Politiken für den gesamten Planungszeitraum bestimmt und implementiert werden, sowie die "m-measurement feedback"-Politik, die jeweils zusätzliche antizipierte Informationen für weitere m-Perioden im Optimierungsalgorithmus berücksichtigt. Nach jedem Optimierungsschritt, d.h. nach Implementierung der jeweils ersten

Entscheidung, verfügt der Entscheidungsträger im letzteren Fall weiterhin über m zusätzliche Beobachtungen.
Die Durchführung passiver adaptiver Kontrollverfahren ist in der Praxis ohne große Probleme möglich, da das Optimierungsverfahren nicht direkt durch die zusätzliche Verfügbarkeit aktueller Informationen beeinflußt wird.

1.3 Aktive adaptive Entscheidungsmodelle

Im allgemeinen sollte jedoch die Aktualisierung der Systemdarstellung nicht unabhängig von der Ableitung der optimalen Politik gesehen werden. Die Klasse der aktiven adaptiven Kontrollmethoden wird durch eine "aktive" Informationsakkumulation charakterisiert; der Prozeß der Informationsanhäufung bzw. Informationsgewinnung ist hierbei im Gegensatz zu den passiven Entscheidungsmodellen im Optimierungsprozeß integriert, d.h. er findet nicht unabhängig vom Optimierungsverfahren statt. Der Entscheidungsträger versucht, den Informationsgewinn, den er durch die Einbeziehung zukünftiger Beobachtungen erwartet, schon zu Beginn des Entscheidungsprozesses zu berücksichtigen und durch eine Veränderung der Kontrollvariablen in zukünftigen Perioden aktiv zu manipulieren und zu vergrößern. Diese Lerneffekte ermöglichen eine gleichzeitige verbesserte Systemdarstellung und Kontrolle. Für die Kontrollverfahren bedeutet dieses Vorgehen die Aufgabe der Annahme, daß die stochastischen Parameter zeitlich unabhängig verteilt sind.

Der Vorteil der aktiven adaptiven Entscheidungsmodelle gegenüber den passiven adaptiven Entscheidungsmodellen ist natürlich davon abhängig, inwieweit eine verbesserte Systemdarstellung zu "besseren" optimalen Politiken in der Zukunft führt. Das Experimentieren zu Beginn des Planungszeitraumes impliziert zunächst höhere Kosten, da der

Entscheidungsträger vom optimalen Kontrollpfad abweicht; in späteren Perioden können jedoch die Kosten eventuell durch eine verbesserte Politik, die dann auf einer genaueren Systemkenntnis basiert (System- und Parameterschätzungen) vermindert werden. Diese experimentelle Komponente ist natürlich nur dann von Bedeutung, wenn der Gewinn in den zukünftigen Perioden die anfänglichen Verluste ausgleicht und überwiegt. So z.B. fordert Dreze (1972), daß der Monopolist von dem Preis, der seinen erwarteten Gewinn maximiert, abgeht, um mehr Informationen über die Nachfragefunktion zu erhalten.

Kendrick (1981) verdeutlicht den Unterschied zwischen passivem und aktivem Lernen anhand eines von Astrom konstruierten Beispiels, das stochastische Kontrollverfahren für große Öltanker entwickelt. Immer wenn ein Tanker Rohöl übernimmt oder entlädt, reagiert das Schiff unterschiedlich auf Steueränderungen. Verläßt der Tanker den Hafen, besteht der passive Lerneffekt in der nach wenigen Minuten jeweils wiederholten Neuschätzung der Reaktionsparameter. Beim aktiven Lernen wird die optimale Kontrolle anfangs gestört, um ein schnelleres Lernen der Schiffsreaktionen auf alternative Steuermaßnahmen zu ermöglichen. Im gewissen Sinne wird so der Lernprozeß beschleunigt.

Die passiven adaptiven Entscheidungsregeln, dargestellt durch die "feedback"-Regeln, beinhalten keine experimentelle Komponente, sie lassen nur "accidental learning" zu [s. Tse (1974)], d.h. die Größe des Lerneffekts wird nicht direkt von einer vorhergehenden Entscheidungsvariablen gesteuert. Der Lerneffekt besteht allein darin, daß die Koeffizienten des Modells nach jeder Periode (Realisation) neu geschätzt werden; der Lernvorgang ist hierbei vollständig passiv.

Die aktiven Entscheidungsregeln berücksichtigen dagegen zukünftiges Lernen; es besteht die Möglichkeit, zukünftige Unsicherheiten zu antizipieren. Der Unterschied zwischen den "feedback" und aktiven adaptiven Entscheidungsregeln liegt demnach in der Informationsmenge, die dem Entscheidungsträger zur Bestimmung der optimalen Entscheidung zur Verfügung steht bzw. die er zur Auswahl der optimalen Politik verwendet.

Die aktiven adaptiven Kontrollmethoden werden auch häufig unter dem Begriff der "dualen" bzw. "dual adaptiven" Kontrolle zusammengefaßt. Schon Feldbaum (1965) zeigte, daß die Wahl einer optimalen Politik im dualen Modell problematisch ist, da sie gleichzeitig zwei im gewissen Sinne konkurrierende Zielrichtungen verfolgt. Der sogenannte duale Effekt besteht darin, daß einerseits ein aktiver Lernprozeß bezüglich der unbekannten Komponenten des Modells (Parameter sowie Systemzustände) ermöglicht werden soll und andererseits die vorgewählten und gewünschten Zielwerte erreicht werden sollen, d.h. in diesem Konflikt zwischen Schätzung und Kontrolle muß die Entscheidung so gewählt werden, daß gleichzeitig die Unsicherheiten im Modell verringert werden und das System in eine gewünschte Richtung gelenkt wird. Die simultane Lösung dieses Kontroll- und Lernproblems impliziert jedoch nicht, daß in die Zielfunktion eine zusätzliche Komponente, die den Lerneffekt berücksichtigt, integriert wird. Die Zielfunktion enthält nur die erwarteten Kosten der Abweichungen der Systemzustände (erweitert um die Instrumentvariablen) von den gewünschten Zielpfaden. Die Minimierung der erwarteten Kosten schließt jedoch einen "trade-off" zwischen Systemdarstellung und Lernen nicht aus [s. Kendrick (1981)].

Der duale Kontrollansatz wird hauptsächlich durch drei Komponenten charakterisiert: direkte Kontrolle, Lernen und

Experimentieren. Der duale Effekt kann nur in der sogenannten "closed-loop"-Regel vollständig berücksichtigt werden. Die "closed-loop"-Politik ist so konzipiert, daß sie alle zusätzlichen Informationen aus dem Beobachtungs- und Planungszeitraum zur optimalen Entscheidungsfindung verarbeitet. Hierbei findet jedoch im Gegensatz zu den passiven Modellen kein sequentielles Implementieren der optimalen Kontrollen der jeweils ersten Periode statt; die abgeleiteten optimalen Politiken werden beim "closed-loop"-Verfahren gänzlich implementiert. Die "closed-loop"-Methode ist für die stochastischen Entscheidungsmodelle wohl das geeignetste Kontrollverfahren, da die aktive Lernkomponente bei der Ableitung der optimalen Politiken vollständig erfaßt wird. Dieses Verfahren erlaubt es, daß die gegenwärtige Politik nicht nur die zukünftigen Systemzustände, sondern auch die Unsicherheit der zukünftigen Zustände beeinflussen kann, d.h. die Kontrolle kann so eingesetzt werden, daß "bessere" Schätzungen für die Systemzustände erreicht werden können.

Ein Problem stellt in diesem Zusammenhang die Informationsform bzw. der Informationsgehalt dar, der durch die Einbeziehung zukünftiger und damit noch unbekannter Beobachtungen impliziert wird. Die einzigen Informationen, die dem Entscheidungsträger über die zukünftigen Beobachtungen zur Verfügung stehen, sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der entsprechenden Zufallsvariablen des Modells. Bar-Shalom und Tse (1974) sprechen hierbei vom "future observation program and its associated statistics". Dagegen berücksichtigen die "feedback"-Regeln nur die "past observation information". Die aktiven adaptiven Kontrollregeln können so als Funktion der Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen aufgefaßt werden. Wegen der Einbeziehung eines aktiven Lernprozesses (der Vergrößerung der Informationsmenge durch Experimentieren) hängen die Kovarianzen der Parameter und Zustände

zukünftiger Perioden aber auch von der Wahl der gegenwärtigen Politik ab.
Bis jetzt ist es noch nicht gelungen, eine analytische Lösung des "closed-loop" bzw. des dualen Problems anzugeben. Feldbaum (1965) sowie Aoki (1967) stellen zwar die rekursiven Gleichungen vor, diese liefern aber keine expliziten Lösungen. In der Literatur werden deswegen vorwiegend analytische Approximationen und numerisch anwendbare adaptive Entscheidungsregeln verwendet. Schon die allgemeine Formulierung des dualen Kontrollproblems impliziert Nichtlinearitäten, da gewöhnlich die Koeffizienten der Zustands- und Kontrollvariablen die unbekannten Parameter des Modells darstellen. Dieses nichtlineare stochastische Entscheidungsproblem ist nur mittels approximativer Verfahren lösbar. Die Leistungsfähigkeit alternativer Approximationsverfahren kann dabei nur anhand von Simulationsläufen untersucht werden; Aussagen sind immer nur bezüglich des zugrundeliegenden Problems möglich [s. hierzu Norman (1976), Bar-Shalom und Tse (1976)]. Eine Rangordnung diverser adaptiver Kontrollalgorithmen existiert nicht.

Die analytischen Probleme verringern sich, wenn die Informationsmenge, die dem Entscheidungsträger zur Verfügung steht, reduziert wird, d.h. wenn die optimalen Entscheidungen auf einem niedrigen Informationsniveau getroffen werden. In der Literatur werden häufig nur die "einfachen" stochastischen Entscheidungsregeln berechnet, sie können aber nur als erste Approximation einer "closed-loop"-Entscheidungsregel angesehen werden.

Zusätzlich werden oft zwei alternative Vorgehensweisen bezüglich des Approximationsverfahrens unterschieden, so spricht man im allgemeinen von passiven Entscheidungsregeln, wenn die Approximationen bezüglich des Modells vorgenommen werden. Aktive adaptive Kontrollverfahren liegen dann vor, wenn sich die Approximationen auf die Ableitung

der optimalen Kontrollregel, d.h. auf das Optimierungsverfahren, beziehen. Pekelman und Tse (1976), Pekelman und Rausser (1978) sowie Rausser und Hochman (1979) demonstrieren anhand eines einfachen eindimensionalen Zweiperiodenproblems die analytischen Schwierigkeiten, die bei der Ableitung der optimalen "closed-loop"-Regel auftreten und so eine Approximation notwendig machen. Die Zielfunktion des zugrundeliegenden statischen Entscheidungssystems kann dabei in eine statische Komponente, die den Effekt der Kontrolle darstellt, und in eine dynamische Komponente, die durch Berücksichtigung des aktiven Lerneffekts entsteht, zerlegt werden. In dynamischen Systemen ist es weitaus schwieriger, die einzelnen Effekte zu separieren, da die gegenwärtige Entscheidung die zukünftigen Zustände beeinflußt.

Die Lösung des dualen Kontrollproblems mit Hilfe der dynamischen Programmierung ist in der Praxis problematisch [s. Tse (1974), Tse, Bar-Shalom und Meier (1973)]; das Konzept des Informationszustandes führt zu einer unendlichen bzw. zu einer (endlichen) über die Zeit wachsenden Informationsmenge. Die Weiterentwicklung der Informationsmenge, die im Optimierungsprozeß durch die sogenannten "optimal cost-to-go"[1] dargestellt wird, beinhaltet, wie zukünftige Beobachtungen gemacht werden und wie sie durch den Entscheidungsträger in einer optimalen Weise verwendet werden. Problematisch ist hierbei, daß die "optimal cost-to-go" im allgemeinen keine explizite Funktion des Informationszustandes bzw. der Informationsmenge sind. Zusätzlich können Dimensionsprobleme bei der Speicherung der Kontrollwerte bzw. der einzelnen Informationszustände auftreten, die eine Lösung des Problems praktisch unmöglich machen.

---

1) Vgl. Abschnitt über "TBM" Ansatz.

Um diese Schwierigkeiten bewältigen zu können, werden im folgenden Approximationen des dualen Entscheidungsmodells vorgestellt; die so erhaltenen Entscheidungsregeln basieren zwar auf der optimalen "closed-loop"-Regel, stellen aber jeweils aufgrund der Approximationen Vereinfachungen dieser Entscheidungsregel dar. Es handelt sich hierbei also um suboptimale Kontrollregeln der Klasse der aktiven adaptiven Entscheidungsregeln.
Als Unterscheidungsmerkmal alternativer approximativer Kontrollverfahren dient die Abhängigkeit zukünftiger Informationen vom gegenwärtigen Politikeinsatz.
Ausführlich werden im folgenden drei alternative Approximationsalgorithmen diskutiert; sie gehen auf Mac Rae (1975), Chow (1975) und Tse, Bar-Shalom und Meier (1973) zurück.

2. Adaptive Kovarianzkontrolle

2.1 Der allgemeine Kontrollalgorithmus

Der folgende Ansatz von Mac Rae (1975) ist einer der einfachsten adaptiven Algorithmen, der aktives Lernen im Planungszeitraum bei der Bestimmung der optimalen Entscheidungsregel berücksichtigt. (Für das eindimensionale Entscheidungsproblem siehe Mac Rae (1972), für das multidimensionale Problem vergleiche Mac Rae (1975)). Der Ansatz liefert durch vereinfachende Verteilungsannahmen eine approximative Lösung der optimalen dualen Kontrollregel; zusätzlich wird eine analytische Lösung des Entscheidungsproblems ermöglicht.

Das Zustandsmodell wird durch die folgende lineare reduzierte Form dargestellt:

(1) $$y_t = Ay_{t-1} + Bu_t + Cz_t + \varepsilon_t = Dw_t + \varepsilon_t$$

$$mit\ D = [A, B, C]\ und\ w_t' = [y_{t-1}', u_t', z_t']$$

Der Ansatz von Mac Rae unterstellt, daß keine Meßfehler bezüglich der Zustandsvariablen y_t vorliegen.[1] Die Störvektoren ε_t sind hier zeitlich unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert Null und bekannter (stationärer) Varianz-Kovarianz Matrix Ω (d.h. $E[\varepsilon_t\ \varepsilon_s'] = \Omega$ für $t = s$ und 0 sonst). Ferner wird angenommen, daß die Parameter zeitlich invariant sind (d.h. die unbekannten, wahren Parameter werden als konstant angesehen), sie sind normalverteilt und mit ε_t unkorreliert. Die Unsicherheit in den Modellparametern wird dadurch berücksichtigt, daß sie als Bayesianische Zufallsvariablen modelliert werden, deren Mittelwerte und Varianzen mit zusätzlichen Beobachtungen im Zeitablauf variieren. Die Verteilung der Zufallsvariablen basiert auf a priori Informationen, wobei unterstellt wird, daß der a priori Mittelwert von D gleich D_0 und die a priori Varianz-Kovarianz Matrix von D gleich Γ_0, mit den Elementen zeilenweise geordnet, gegeben sind. Da die a priori Verteilung eine multivariate Normalverteilung ist, läßt sich die a priori oder bedingte Verteilung von D bei gegebenen Beobachtungen bis zur Periode t, die dann ebenfalls eine multivariate Normalverteilung darstellt, durch die a posteriori Varianz Γ_t und Mittelwert $\bar{D}_t$ nach folgenden Rekursionsgleichungen berechnen [vgl. Mac Rae (1975) Anhang].

(2) $$\Gamma_t^{-1} = \Gamma_{t-1}^{-1} + \Omega^{-1} \otimes w_t w_t' \qquad \text{und}$$

(3) $$vec\,\bar{D}_t' = \Gamma_t [\, \Gamma_{t-1}^{-1}\, vec\,\bar{D}_{t-1}' + (\Omega^{-1} \otimes w_t)\, y_t] \quad \text{für} \quad t = 1, \ldots, T.$$

---

1) y_t, u_t und z_t wie bei Chow (1975).

wobei der Operator vec Matrizen in Vektoren überführt und ⊗ das Kroneckerprodukt darstellt. Die Gleichungen (2) und (3) beschreiben hier vollständig die zur Verfügung stehende Informationsmenge. Bei Annahme einer quadratischen Zielfunktion ist die Lösung dieses Entscheidungsproblems im allgemeinen analytisch nicht möglich, da die Mittelwerte und Varianzen in (2) und (3) von den unbekannten zukünftigen Werten für w_t und y_t abhängen und somit natürlich stochastisch sind .

Mac Rae schlägt nun eine strukturelle Approximation zur Lösung des obigen Entscheidungsproblems vor, d. h. die obigen Gleichungen (2) und (3) werden durch ähnlich strukturierte Gleichungen ersetzt. Prescott (1972) löst das Problem für den eindimensionalen Fall mit Hilfe einer numerischen Approximation.

Bei der strukturellen Approximation werden die unbekannten zukünftigen Beobachtungen in den "update"-Gleichungen durch erwartete Beobachtungen ersetzt, es gilt dann:

(4) $$\Gamma_t^{-1} = \Gamma_{t-1}^{-1} + \Omega^{-1} \otimes E[w_t w_t'] \text{ und}$$

(5) $$vec\,\bar{D}_t' = \Gamma_t[\Gamma_{t-1}^{-1}\, vec\,\bar{D}_{t-1}' + E[(\Omega^{-1} \otimes w_t) y_t]].$$

Die Erwartungswertbildung basiert auf den Informationen zu Beginn des Planungszeitraumes. Wird in (5) y_t durch $\bar{D}_{t-1} w_t$ ersetzt, so folgt $vec\ \bar{D}_t' = vec\ \bar{D}_{t-1}'$; die approximierten "updated" Mittelwerte sind für alle t im Planungszeitraum konstant und gleich dem a priori Mittelwert.
Das Vorgehen von Mac Rae wird also dadurch charakterisiert, daß die bedingten Verteilungen von D durch unbedingte Verteilungen separater unabhängiger Zufallsvariablen D_t mit Mittelwert D_0 und Varianz wie in (4) ersetzt werden. Der Lernprozeß wird durch Gleichung (4) erfaßt; die Politik u_t beeinflußt indirekt über w_t die zur

Verfügung stehende Informationsmenge. Γ_t^{-1} gibt also jeweils den relevanten Informationsstand des Entscheidungsträgers an.

Die optimale Entscheidungsregel dieses approximativen Kontrollansatzes ist eine Folge von stochastischen "feedback"-Regeln, wobei jeweils nur die Politik für die erste Periode implementiert wird. Die Berechnung erfolgt über die Minimierung des Erwartungswertes einer quadratischen Zielfunktion unter der Nebenbedingung des stochastischen Differenzengleichungsmodells und der deterministischen "Varianz-Update-Gleichung". Mac Rae benutzt zur Lösung des Kontrollproblems eine Kombination der "Dynamischen Programmierung" und des Lagrange-Ansatzes [siehe auch Bellman (1961)].

Im Gegensatz zu Mac Rae verwenden wir im folgenden explizit eine quadratische Verlustfunktion[1]. Die Instrumentvariablen werden dabei nur indirekt durch den erweiterten Zustandsvektor berücksichtigt. Zusätzlich wird unterstellt, daß keine Abdiskontierung im Zeitablauf stattfindet. Die zu minimierende Zielfunktion hat dann im vorliegenden Fall die folgende Form:

$$(6) \qquad W = E\left[\sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right] + \sum_{t=1}^{T} tr \left[M_t (\Gamma_t^{-1} - \Gamma_{t-1}^{-1} - \Omega^{-1} \otimes E[w_t w_t']) \right]$$

---

1) Die quadratische Verlustfunktion hat folgende Form:

$$W = E\left[\sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t) \right],$$

wobei K_t eine positiv semidefinite Matrix und a_t die gewünschten Werte (Sollpfade) darstellen.

Die Berücksichtigung der Nebenbedingung impliziert eine Matrix M von Lagrangemultiplikatoren; sie ist symmetrisch und hat die gleiche Dimension wie Γ_t. Das Optimierungsverfahren besteht aus zwei Schritten. Zunächst liefert die dynamische Programmierung Lösungen für $u_1,\ldots,u_T$ und $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_T$ bei gegebenen Werten für $M_1,\ldots,M_T$. Da die Beziehungen zwischen zeitlich verschiedenen Γ_t hierbei nicht erfaßt werden, erfüllen die so erhaltenen Werte für Γ_t im allgemeinen auch nicht die "Varianz-Update"-Gleichung. Im zweiten Schritt werden Werte für M_t so gewählt, daß Gleichung (4) erfüllt ist.

Die dynamische Programmierung zerlegt die Optimierung in T Optimierungsschritte, für die letzte Periode lautet die zu minimierende Zielfunktion bei Verwendung des von Mac Rae eingeführten Sternproduktes:

$$(7) \qquad W_T = E_{T-1}\,[\,(y_T - a_T)' K_T (y_T - a_T) + M_T * \Gamma_{T-1}^{-1}$$

$$+ M_{T-1} * \Gamma_{T-1}^{-1} - w_T' (\Omega^{-1} * M_T) w_T\,]$$

$$= E_{T-1}\,[\,y_T' H_T y_T - 2 y_T' h_T + c_T + (M_{T-1} - M_T) * \Gamma_{T-1}^{-1}$$

$$- w_T' (\Omega^{-1} * M_T) w_T\,]$$

$$\textit{mit } H_T = K_T,\ h_T = K_T a_T \textit{ und } c_T = a_T' K_T a_T\,,$$

$$(\textit{für } t = 1 \textit{ wird } M_{t-1} * \Gamma_{t-1}^{-1} \textit{ weggelassen}).$$

Setzen wir für y_T Gleichung (1) ein und bilden den Erwartungswert, so folgt:

(8)
$$W_T = w_T'(E_{T-1}[D'H_T D] - \Omega^{-1} * M_T)\, w_T - 2\, w_T' D'\, h_T$$
$$+ c_T + (M_{T-1} - M_T) * \Gamma_{T-1}^{-1} + H_T * \Omega$$
$$= w_T'\,(\bar{D}' H_T \bar{D} + H_T * \Gamma_{T-1} - \Omega^{-1} * M_T)\, w_T$$
$$- 2\, w_T' \bar{D}'\, h_T + c_T + (M_{T-1} - M_T) * \Gamma_{T-1}^{-1} + H_T * \Omega.$$

Durch Aufspalten der Terme $\bar{D}$, M_T, Γ_{T-1} und w_T ergibt sich dann:

(9)
$$W_T = y_{T-1}'[\bar{A}' H_T \bar{A} + H_T * \Gamma_{T-1}^{AA} - \Omega^{-1} * M_T^{AA}]\, y_{T-1}$$
$$+ u_T'[\bar{B}' H_T \bar{B} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BB} - \Omega^{-1} * M_T^{BB}]\, u_T$$
$$+ z_T'[\bar{C}' H_T \bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{CC} - \Omega^{-1} * M_T^{CC}]\, z_T$$
$$+ 2\, u_T'[\bar{B}' H_T \bar{A} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BA} - \Omega^{-1} * M_T^{BA}]\, y_{T-1}$$
$$+ 2\, u_T'[\bar{B}' H_T \bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BC} - \Omega^{-1} * M_T^{BC}]\, z_T$$
$$+ 2\, y_{T-1}'[\bar{A}' H_T \bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{AC} - \Omega^{-1} * M_T^{AC}]\, z_T$$
$$- 2\, y_{T-1}' \bar{A}' h_T - 2\, u_T' \bar{B}' h_T - 2\, z_T' \bar{C}' h_T$$
$$+ (M_{T-1} - M_T) * \Gamma_{T-1}^{-1} + c_T + H_T * \Omega$$

Die Minimierung von W_T bezüglich u_T liefert dann folgende lineare Entscheidungsregeln:

(10) $$\hat{u}_T = G_T y_{T-1} + g_T$$

mit[1]

$$G_T = -[\bar{B}'H_T\bar{B} + H_T * \Gamma^{BB}_{T-1} - \Omega^{-1} * M^{BB}_T]^{-1}$$

$$\times[\bar{B}'H_T\bar{A} + H_T * \Gamma^{BA}_{T-1} - \Omega^{-1} * M^{BA}_T]$$

$$g_T = -[\bar{B}'H_T\bar{B} + H_T * \Gamma^{BB}_{T-1} - \Omega^{-1} * M^{BB}_T]^{-1}$$

$$\times[(\bar{B}'H_T\bar{C} + H_T * \Gamma^{BC}_{T-1} - \Omega^{-1} * M^{BC}_T)z_T - \bar{B}'h_T].$$

Die hochgestellten Indices bezeichnen spezielle Untermatrizen von Γ bzw. M, Γ^{BA} enthält z. B. die Kovarianzen zwischen A und B. Zusätzlich wird angenommen, daß M_T so gewählt wird, daß der Nenner von G_T positiv definit ist (dies ist für ein Minimum notwendig) .

Den optimalen Wert für Γ_{t-1} erhalten wir durch partielle Differentiation von (8) nach Γ_{T-1}:

(11) $$M_{T-1} = M_T + \Gamma_{T-1}(H_T \otimes E_{T-1}[w_T w_T'])\Gamma_{T-1} \text{ und } M_T = 0$$

M_T = 0 impliziert, daß ein endliches Minimum der Zielfunktion existiert. Die Multiplikatoren M_t können in diesem Konzept als Preise zusätzlicher Informationen interpretiert werden. Alle Informationen, die während der letzten Periode anfallen, werden nicht mehr benutzt, da keine weiteren Entscheidungen über den Planungszeitraum hinaus getroffen werden.

---

1)Alternative Schreibweise:

$$G_T = -(E_{T-1}[B'H_TB] - \Omega^{-1} * M^{BB}_T)^{-1} - (E_{T-1}[B'H_TA] - \Omega^{-1} * M^{BA}_T).$$

Einsetzen von (10) in (9) liefert den optimalen Verlust der letzten Periode. Die zu minimierende Zielfunktion des anschließenden Zweiperiodenproblems lautet in diesem Fall:

(12)
$$W_{T-1} = E_{T-2}[y_{T-1}'H_{T-1}y_{T-1} - 2y_{T-1}'h_{T-1} + c_{T-1}$$
$$+ (M_{T-2} - M_{T-1}) * \Gamma_{T-2}^{-1} - w_{T-1}'(\Omega^{-1} * M_{T-1})w_{T-1}]$$

mit den Riccati Gleichungen:

(13)
$$H_{T-1} = K_{T-1} + \bar{A}'H_T\bar{A} + H_T * \Gamma_{T-1}^{AA} - \Omega^{-1} * M_T^{AA}$$
$$+ [\bar{B}'H_T\bar{A} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BA} - \Omega^{-1} * M_T^{BA}]'G_T$$

$$h_{T-1} = k_{T-1} + (\bar{A} + \bar{B}G_T)'h_T - ([\bar{A}'H_T\bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{AC} - \Omega^{-1} * M_T^{AC}]$$
$$+ G_T'[\bar{B}'H_T\bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BC} - \Omega^{-1} * M_T^{BC}])z_T$$

$$c_{T-1} = a_{T-1}'K_{T-1}a_{T-1} + (M_{T-1} - M_T) * \Gamma_{T-1}^{-1} + H_T * \Omega$$
$$+ c_T - 2(\bar{B}g_T + \bar{C}z_T)'h_T$$
$$+ 2g_T'[\bar{B}'H_T\bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BC} - \Omega^{-1} * M_T^{BC}]z_T$$
$$+ g_T'[\bar{B}'H_T\bar{B} + H_T * \Gamma_{T-1}^{BB} - \Omega^{-1} * M_T^{BB}]g_T$$
$$+ z_T'[\bar{C}H_T\bar{C} + H_T * \Gamma_{T-1}^{CC} - \Omega^{-1} * M_T^{CC}]z_T.$$

Da Gleichung (12) die gleiche Form hat wie (7) (nur für T jetzt $T-1$), kann das obige Verfahren bis zur Bestimmung der optimalen Politik u_1 iterativ fortgesetzt werden, d.h. die Gleichungen (10), (11) und (13) liefern optimale Entscheidungsregeln für u_t ($t = 1,\ldots,T$) und optimale Werte für Γ_t ($t = 1,\ldots,T-1$).

Der zweite Optimierungsschritt besteht aus der geeigneten Wahl der M_t, so daß die Werte für u_t und Γ_t die "Kovarianz-update"-Gleichung erfüllen. Da $M_T = 0$ kann Γ_T direkt aus der Kovarianz-Bedingung für die letzte Periode bestimmt werden. Die Werte für $M_1,...,M_{T-1}$ werden dann implizit durch die Kovarianz-Gleichung für die Periode $t=1,...,T-1$ berechnet, d.h. $M_1,...,M_{T-1}$ und Γ_T werden durch (4) bestimmt. Insgesamt bedeutet dies für die Lösung des Problems, daß die optimale Politik $\hat{u}_t$ eine Funktion der vergangenen Zustände y_{t-1} bei gegebenem Γ_{t-1} und M_t ist, dabei werden die Zustände durch das ökonometrische Gleichungssystem repräsentiert; Γ und M sind Funktionen der Zustände y und der Politiken u.

Γ wird durch (4) bestimmt, M ist durch (11) gegeben. Die Lösung des obigen Problems kann mit gewöhnlichen numerischen Methoden erreicht werden ("Two point boundary value problem").

2.2 Analytische Aussagen (Eigenschaften) über den Kontrollalgorithmus

In diesem Konzept gibt Γ_t^{-1} gerade die zur Verfügung stehende Informationsmenge an, während M_t den Preis zusätzlicher Informationen darstellt: M_t ist die Ableitung der Zielfunktion nach Γ_t^{-1}. Bei der Bestimmung der optimalen adaptiven "feedback"-Regel wird die Matrix M_t immer im Zusammenhang mit Ω^{-1} verwendet. Die Varianz-Matrix Ω repräsentiert hierbei die Informationsmenge, die aus dem ökonometrischen System erhältlich ist. Ein großes Ω bedeutet, daß die Systementwicklung äußerst schlecht vorhersagbar ist, zusätzliche Beobachtungen bezüglich y und u ergeben nur geringfügige Verbesserungen hinsichtlich der Schätzwerte der Koeffizienten; der Informationsgewinn (Lernef-

fekt) aufgrund zusätzlicher Beobachtungen ist hierbei sehr beschränkt.

Mac Rae bezeichnet den Term $\Omega^{-1} * M_t$ als "value of estimating". In der Zielfunktion (8) erscheint $\Omega^{-1} * M_t$ mit einem negativen Vorzeichen. Ein großer Wert von $\Omega^{-1} * M_t$, impliziert durch eine kleine Varianzmatrix Ω, kann die Kosten, die bei der Wahl einer nicht optimalen Politik (durch Experimentieren) entstehen, in gewissem Maße reduzieren. Wenn dagegen der Wert von $\Omega^{-1} * M_t$ klein ist (das Modell ist nicht sehr störanfällig), kann ein Abweichen von den optimalen Pfaden zum Zweck verbesserter Schätzungen zu erhöhten Kosten führen.

Unterstellen wir ein statisches ökonometrisches Modell, d.h. $A \equiv 0$, so reduzieren sich die Riccati-Gleichungen zu $H_t = K_t$ und $h_t = k_t$, da $G_t = 0$. Die Berücksichtigung der "Varianz-update"-Gleichung im Optimierungsprozeß impliziert jedoch, daß das Entscheidungsproblem dynamisch bleibt, selbst wenn ein statisches Modell als Nebenbedingung verwendet wird. Die analytische Lösung des adaptiven Entscheidungsproblems ermöglicht einen Vergleich mit einfachen Entscheidungsregeln. Um aber überhaupt Aussagen über spezielle optimale Politikregeln machen zu können, werden im folgenden nur die Algorithmen zur Bestimmung der optimalen Entscheidungsregel der ersten Periode untersucht. Spezialfälle des obigen Ansatzes sind die sicherheitsäquivalente und die stochastische (ohne Lerneffekt) Entscheidungsregel.

Im sicherheitsäquivalenten Fall ist die Varianzmatrix Γ_t in jeder Periode gleich Null, d.h. es gibt keine Unsicherheit bezüglich der Parameter, ein Lernprozeß bzw. Informationsgewinn ist ausgeschlossen. Dies impliziert sofort, daß der Preis zusätzlicher Informationen M_t gleich Null ist (d. h. $M_t = 0$, $\Gamma_t = 0$ für $t = 1,\dots,T$). Diese Entscheidungsregel ist

mit der üblichen sicherheitsäquivalenten Lösung identisch.

Die passive stochastische Entscheidungsregel berücksichtigt dagegen Unsicherheiten in den Parametern (sie werden als unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in jeder Periode modelliert), schließt aber einen Lerneffekt, der durch zukünftige Beobachtungen im Planungszeitraum entsteht, bei der Ableitung der optimalen Entscheidungsregel von vornherein aus, indem die Varianzen der Parameter Γ_t $(t = 1,...,T)$ gleich der a priori Varianz Γ_0 gesetzt werden. Gleichung (11) impliziert hier jedoch, daß M_t $(t = 1,...,T-1)$ ungleich Null ist. Da aber die Kontrollregel keinen Einfluß auf das Niveau der Varianzmatrix Γ_t hat, wird bei der Bestimmung der optimalen Entscheidung die Matrix M_t, die ja den Preis zusätzlicher Informationen darstellt, nicht berücksichtigt. Die optimale Entscheidungsregel wird analog zur passiven Politik bei Chow (1975) berechnet.

Ein Vergleich der verschiedenen optimalen Politiken bezüglich der ersten Periode des Planungszeitraums ist im dynamischen Modell nicht möglich, da die Matrizen H_1 bzw. h_1 für die unterschiedlichen Entscheidungsmodelle differieren, die Ursache hierfür liegt in der unterschiedlichen Berücksichtigung zukünftiger Informationen. Da das Kontrollproblem rückwärts im Planungszeitraum gelöst wird und jeweils gleiche Anfangsbedingungen für H_T und h_T unterstellt werden, können die optimalen Entscheidungen für die letzte Periode T verglichen werden, jedoch werden diese Politiken nicht implementiert, nur jeweils die optimale Politik der ersten Periode wird verwendet.

Da die Information, die während der letzten Periode anfällt, nicht mehr weiter genutzt wird, gilt im adaptiven Entscheidungsmodell $M_T = 0$; die Koeffizienten G_T bzw. g_T

haben im stochastischen und adaptiven Modell die gleiche Form, nur wird $\Gamma_{T-1} = \Gamma_0$ im stochastischen Fall gesetzt.

Es ist durchaus möglich (siehe Beispiel von Mac Rae), daß die adaptive Entscheidungsregel für die erste Periode eine vorsichtigere Politik impliziert als die stochastische Entscheidungsregel. So kann z.B. die optimale Politik des adaptiven Modells darin bestehen, zuerst nichts oder nur wenig zu unternehmen, um die relativ hohen Kosten aufgrund der anfänglichen größeren Unsicherheit zu vermeiden. Erst in späteren Perioden, wenn die Auswirkungen der Entscheidungen besser bekannt sind, werden verstärkt aktivere Politiken durchgeführt. Dies steht im Widerspruch zu Chows These, daß die adaptiven Entscheidungsmodelle zu agressiveren Politiken führen als die stochastischen Systeme.

Im dynamischen Entscheidungsmodell sind analytische Aussagen über die Größe der verschiedenen Entscheidungsregeln äußerst schwierig, da nicht eindeutig bestimmt werden kann, ob der Effekt der Varianzen (größere Varianzen in den Parametern bedeuten erhöhte Unsicherheit) oder der Effekt der Kovarianzen (größere Kovarianzen liefern mehr Informationen) auf die optimale Entscheidungsregel überwiegt.

Nur im statischen Entscheidungsmodell ist ein Vergleich der verschiedenen Entscheidungsregeln unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Für alle Politiken gilt dann $H_t=K_t$ und $h_t=k_t$ für $t = 1,\ldots,T$. Im Gegensatz zum dynamischen Modell, wo H_t und h_t auch den zukünftigen Einfluß der optimalen Entscheidung $\hat{u}_t$ auf die Verlustfunktion darstellen, kann im statischen Modell nur der gegenwärtige Effekt der Politik mit den Riccati-Koeffizienten erfaßt werden. Die Entscheidungsregeln $\hat{u}_t$ sind für alle Perioden direkt vergleichbar, die optimale Politik lautet nun $\hat{u}_t=g_t$. Um analytische Aussagen über die Größe von g_t machen zu

können, unterstellen wir, daß die Koeffizientenmatrix C deterministisch ist, also keine Kovarianzen zwischen B und C existieren. Bei einer Kovarianz ungleich Null wird ein Vergleich äußerst schwierig. Für das adaptive Modell ergibt sich somit in der ersten Periode:

$$(14) \qquad g_1 = [\bar{B}'H_1\bar{B} + H_1 * \Gamma_0^{BB} - \Omega^{-1} * M_1^{BB}]^{-1} \times [\bar{B}'[H_1\bar{C}z_1 - h_1]].$$

Für die stochastische Entscheidungsregel gilt Gleichung (14) mit $M_1^{BB} = 0$ und für die sicherheitsäquivalente Lösung noch zusätzlich $\Gamma_0^{BB} = 0$.

Das stochastische Entscheidungsmodell liefert hier eine konservativere (vorsichtigere) Politik als das sicherheitsäquivalente Modell, da der Wert der stochastischen Politik durch Addition des Unsicherheitsfaktors $H_1 * \Gamma_0^{BB}$ im Nenner von g_1 absolut gesehen kleiner ist als bei der deterministischen Entscheidung. Dagegen stellt die adaptive Regel unter den obigen Voraussetzungen eine aggressivere Politik als die stochastische Entscheidung dar. Der zusätzliche Term $\Omega^{-1} * M_1^{BB}$, der im Nenner von g_1 subtrahiert wird, impliziert einen größeren Wert für die adaptive optimale Politik.

Ein Vergleich zwischen der adaptiven optimalen Politik und der sicherheitsäquivalenten Entscheidung ist nicht möglich, da keine Aussagen über die relative Größe der zusätzlichen Komponenten $H_1 * \Gamma_0^{BB}$ und $\Omega^{-1} * M_1^{BB}$ vorliegen und somit unklar ist, welcher Faktor überwiegt. Die adaptive Politik kann deshalb entweder aggressiver oder konservativer sein als die sicherheitsäquivalente Entscheidungsregel [vgl. Mac Rae (1975)].

Im allgemeinen können nur mit Hilfe numerischer Beispiele modellspezifische Aussagen über die Größe einzelner Entscheidungsregeln gemacht werden.

2.3 Ein vereinfachter Entscheidungsalgorithmus

Prescott (1972) leitet für ein einfaches eindimensionales Modell optimale Entscheidungsregeln ab, die äquivalent zur adaptiven Kovarianzkontrolle von Mac Rae sind. Dabei unterstellt er ein ökonometrisches Modell mit nur einem unbekannten Parameter, einer Politik- und einer Zustandsvariablen. Sein Vorgehen ist jedoch für den multivariaten Fall wegen der Komplexität des Ansatzes nicht anwendbar.

Bei einem Vergleich [Prescott (1971)] der sicherheitsäquivalenten mit der dualen Entscheidungsregel kommt er zu dem allgemein erwarteten Ergebnis, daß der sicherheitsäquivalente Ansatz ein adäquates Verfahren darstellt, wenn die Unsicherheit in den unbekannten Parametern relativ klein ist (Prescott gibt hierfür Werte an), andernfalls, wenn die Standardabweichung groß ist, ist der duale Ansatz vorzuziehen. Je länger der Planungshorizont, desto wichtiger ist die experimentelle Komponente der adaptiven Kontrollmethode.

3. Numerisches Approximationsverfahren von Chow

3.1 Der allgemeine Kontrollalgorithmus

Im folgenden soll ein approximativer dualer Kontrollansatz entwickelt werden, der auf dem Chow-Algorithmus basiert [s. hierzu Chow (1975) und Abel (1975)]. Dieses Verfahren kann in der Praxis ohne große Schwierigkeiten angewendet werden. Im Gegensatz zu Chow unterstellen wir als Ziel-

funktion die gewöhnliche quadratische und über die Zeit additive Verlustfunktion.

(15)
$$W = E\left[\sum_{t=1}^{T}(y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)\right] = E\left[\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{2} y_t' \bar{K}_t y_t + y_t' k_t + c_t\right)\right]$$

mit $\bar{K}_t = 2 K_t$,

$k_t = -2 K_t a_t$ und $c_t = a_t' K_t a_t$.

Die letztere Darstellungsweise ist hier vorteilhaft, da im folgenden Taylorreihenapproximationen 2. Ordnung verwendet werden. Ferner sollen die üblichen Annahmen bezüglich der Parameter der Verlustfunktion gelten. Das Entscheidungsproblem besteht in der Minimierung von (15) unter der Nebenbedingung eines ökonometrischen Systems, das als Differenzengleichungssystem 1. Ordnung dargestellt werden kann, wobei vorausgesetzt wird, daß die Zustandsvariablen ohne Meßfehler in das System eingehen:

(16)
$$y_t = A_t y_{t-1} + B_t u_t + C_t z_t + \varepsilon_t.$$ [1)]

Für die stochastischen Parameter A_t, B_t und C_t wird im folgenden ein aktiver Lernprozeß unterstellt. Die additiven Störterme ε_t sind hier normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz Ω_t, außerdem zeitlich unkorreliert und auch unkorreliert mit A_t, B_t und C_t.
Das Entscheidungsproblem wird nun mit der Methode der dynamischen Programmierung gelöst, d.h. die Lösung wird rekursiv im Planungszeitraum berechnet.

---

1) Bei Chow werden die echt exogenen Variablen nicht berücksichtigt.

Für die letzte Periode T lautet die zu minimierende Zielfunktion:

(17)
$$W_T = E_{T-1}\left[\frac{1}{2}\, y_T' H^T_{T,T} y_T + y_T' h^T_T\right] + c_T$$

$$\text{mit } H^T_{T,T} = \overline{K}_T \text{ und } h^T_T = k_T.$$[1]

Mit $E_{T-1}[\cdot]$ bezeichnen wir, wie bisher üblich, den bedingten Erwartungswert $E[\cdot|y_{T-1}]$, d.h. der Erwartungswert wird aufgrund der in $T-1$ verfügbaren Information gebildet.

Einsetzen von (16) in (17) und partielle Differentiation nach u_t liefert folgende optimale Entscheidungsregel für die Periode T:

(18)
$$\hat{u}_T = G_T y_{T-1} + g_T$$

$$\text{mit } G_T = -(E_{T-1}[B_T' H^T_{T,T} B_T])^{-1}(E_{T-1}[B_T' H^T_{T,T} A_T])$$

$$\text{und } g_T = -(E_{T-1}[B_T' H^T_{T,T} B_T])^{-1}(E_{T-1}[B_T' H^T_{T,T} C_T]\, z_T + E_{T-1}[B_T' h^T_T]).$$

Im Gegensatz zu den stochastischen Entscheidungsmodellen, die einen Lerneffekt bzw. Informationsgewinn aus zukünftigen Beobachtungen ausschließen - die bedingten Erwartungswerte E_{T-1} werden gleich E_0 gesetzt, d. h. die Verteilungen der stochastischen Parameter werden im Anfangszeitpunkt als bekannt und zeitinvariant aufgefaßt - ist die optimale Entscheidungsregel $\hat{u}_T$ hier nicht mehr linear in y_{T-1}. Der optimale Feedbackkoeffizient G_T sowie der additive Term g_T sind Funktionen der vergangenen Systemzu-

---

1) Diese Bezeichnungsweise wird erst später deutlich.

stände $y_{T-1},\ldots,y_1$ und Instrumenteinsätze $u_{T-1},\ldots,u_1$, da sie von den bedingten Erwartungswerten zum Zeitpunkt $T-1$ abhängen. Der aktive Lerneffekt besteht hierbei in der Revision der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der stochastischen Parameter aufgrund zusätzlicher Informationen. Die minimalen Kosten für die Periode T ergeben sich durch Einsetzen der optimalen Entscheidung (18) in (17); sie sind eine nichtlineare Funktion in $y_1, \ldots, y_{T-1}$, d.h. es liegt ein nichtlineares Entscheidungsproblem vor. Der Kontrollalgorithmus von Chow wird dadurch charakterisiert, daß nun die optimale Zielfunktion der letzten Periode durch eine Taylorreihe 2. Ordnung approximiert wird, wobei Chow im Gegensatz zu anderen Autoren auch die gemischten Ableitungen in seinen Ansatz einbezieht. Da die benötigten Ableitungen analytisch nur schwer zu berechnen sind, wird hier ein numerisches Verfahren gewählt, in dem die Veränderungsraten der Funktion bezüglich kleiner Änderungen in den Variablen $y_1, \ldots, y_{t-1}$ berechnet werden (numerische Differentiation). Als approximativen Ausdruck der optimalen Kosten erhalten wir:

$$(19) \qquad \hat{W}_T = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-1} y_t' Q_{t,t}^T y_t + \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^T y_s + \sum_{t=1}^{T-1} y_t' q_t^T + r_T$$

mit $r_T = f_T + c_T$, wobei f_T die Konstante der Taylorreihenapproximation darstellt. Die Methode der dynamischen Programmierung (Optimalitätsprinzip) erlaubt uns nun, die optimale Entscheidung $\hat{u}_{T-1}$ zu bestimmen, indem der Erwartungswert der Verlustfunktion für die letzten beiden Perioden minimiert wird unter der Voraussetzung, daß die Politik für die letzte Periode schon optimal gewählt ist, d.h.

(20) $$W_{T-1} = E_{T-2}\left[\frac{1}{2} y_{T-1}'\bar{K}_{T-1} y_{T-1} + y_{T-1}' k_{T-1} + c_{T-1} + \hat{W}_T\right].$$

Wird $\hat{W}_T$ in (20) durch die Taylorreihenapproximation (19) ersetzt, so folgt für die zu minimierende Verlustfunktion W_{T-1}:

(21) $$W_{T-1} = E_{T-2}\left[\frac{1}{2} y_{T-1}' H_{T-1,T-1}^{T-1} y_{T-1} + y_{T-1}' \sum_{s=1}^{T-2} H_{T-1,s}^{T-1} y_s\right.$$

$$\left. + y_{T-1}' h_{T-1}^{T-1}\right] + d_{T-1} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-2} y_t' Q_{t,t}^T y_t$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-2} \sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^T y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' q_t^T$$

$$\text{mit } H_{T-1,T-1}^{T-1} = \bar{K}_{T-1} + Q_{T-1,T-1}^T; \quad H_{T-1,s}^{T-1} = Q_{T-1,s}^T \text{ für } s = 1, \ldots, T-2;$$

$$h_{T-1}^{T-1} = k_{T-1} + q_{T-1}^T; \quad d_{T-1} = c_{T-1} + r_T,$$

d.h. die Terme, die nicht von u_{T-1} bzw. y_{T-1} abhängen, werden in dem konstanten Term d_{T-1} und der Summenformel

$$\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-2} y_t' Q_{t,t}^T y_t + \sum_{t=1}^{T-2} \sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^T y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' q_t^T$$

zusammengefaßt. Nach Einsetzen des ökonometrischen Modells (für y_{T-1}) in (21) folgt

(22)
$$W_{T-1} = E_{T-2}\Big[\frac{1}{2}(A_{T-1}y_{T-2} + B_{T-1}u_{T-1} + C_{T-1}z_{T-1} + \varepsilon_{T-1})'$$
$$\times H^{T-1}_{T-1,T-1}(A_{T-1}y_{T-2} + B_{T-1}u_{T-1} + C_{T-1}z_{T-1} + \varepsilon_{T-1})$$
$$+ (A_{T-1}y_{T-2} + B_{T-1}u_{T-1} + C_{T-1}z_{T-1} + \varepsilon_{T-1})'$$
$$\times (\sum_{s=1}^{T-2} H^{T-1}_{T-1,s}\, y_s + h^{T-1}_{T-1})\Big] + d_{T-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-2} y_t' Q^T_{t,t} y_t + \sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s<t} y_t' Q^T_{t,s} y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' q^T_t$$

Die Minimierung von (22) durch Differentiation nach u_{T-1} ergibt:

(23)
$$\hat{u}_{T-1} = G_{T-1}y_{T-2} + g_{T-1}$$
$$\text{mit}\, G_{T-1} = -\left(E_{T-2}\left[B_{T-1}' H^{T-1}_{T-1,T-1} B_{T-1}\right]\right)^{-1}$$
$$\times \left(E_{T-2}\left[B_{T-1}' H^{T-1}_{T-1,T-1} A_{T-1} + B_{T-1}' H^{T-1}_{T-1,T-2}\right]\right)$$
$$\text{und}\; g_{T-1} = -\left(E_{T-2}\left[B_{T-1}' H^{T-1}_{T-1,T-1} B_{T-1}\right]\right)^{-1}$$
$$\times \left(E_{T-2}\left[B_{T-1}' H^{T-1}_{T-1,T-1} C_{T-1}\right] z_{T-1} + E_{T-2}\left[B_{T-1}'\right]\right.$$
$$\left.\times \left(\sum_{s=1}^{T-3} H^{T-1}_{T-1,s} y_s + h^{T-1}_{T-1}\right)\right).$$

Die optimale Entscheidung $\hat{u}_{T-1}$ ist hier eine nichtlineare Funktion der vergangenen Systemzustände $y_{T-2},\dots,y_1$ und Instrumente $u_{T-2},\dots,u_1$. Nach Einsetzen von (23) in (22) kann die Erwartungswertkomponente der optimalen Verlustfunktion als quadratische Funktion in $y_1,\dots,y_{T-2}$ geschrieben werden, hierzu wird sie durch eine Taylorreihe 2. Ordnung approximiert, d. h. für die optimale Verlustfunktion der Periode $T-1$ folgt

(24)
$$\hat{W}_{T-1} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-2} y_t' Q_{t,t}^{T-1} y_t + \sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^{T-1} y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' q_t^{T-1} + f_{T-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-2} y_t' Q_{t,t}^{T} y_t + \sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^{T} y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' q_t^{T} + d_{T-1}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T-2} y_t' P_{t,t}^{T-1} y_t + \sum_{t=1}^{T-2}\sum_{s<t} y_t' P_{t,s}^{T-1} y_s + \sum_{t=1}^{T-2} y_t' p_t^{T-1} + r_{T-1}$$

mit
$$P_{t,s}^{T-1} = Q_{t,s}^{T-1} + Q_{t,s}^{T} \quad (t = 1,\dots,T-2;\ s \leq t)$$
$$p_t^{T-1} = q_t^{T-1} + q_t^{T} \quad (t = 1,\dots,T-2)$$
$$r_{T-1} = f_{T-1} + d_{T-1} .$$

Das obige Verfahren [Gleichung (19) bis (24)] kann für die weiteren Perioden im Planungszeitraum analog durchgeführt werden, da Gleichung (24) die gleiche Form hat wie (19), nur daß jetzt $T-1$ anstatt T gilt; für (19) gilt zusätzlich

$$Q_{t,s}^{T-1} = P_{t,s}^{T} \quad und \quad q_t^T = p_t^T \quad \text{für} \quad t = 1, \ldots, T-1 \quad und \quad s \leq t.$$

Die zu minimierende Verlustfunktion für die Periode *T-2* lautet nun

(25)
$$W_{T-2} = E_{T-3}\left[\frac{1}{2} y_{T-2}' H_{T-2,T-2}^{T-2} y_{T-2} \right.$$

$$\left. + y_{T-2}' \sum_{s=1}^{T-3} H_{T-2,s}^{T-2} y_s + y_{T-2}' h_{T-2}^{T-2} \right] + d_{T-2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-3} y_t' P_{t,t}^{T-1} y_t + \sum_{t=1}^{T-3} \sum_{s<t} y_t' P_{t,s}^{T-1} y_s + \sum_{t=1}^{T-3} y_t' p_t^{T-1}$$

$$mit\ H_{T-2,T-2}^{T-2} = \bar{K}_{T-2} + P_{T-2,T-2}^{T-1}$$

$$H_{T-2,s}^{T-2} = P_{T-2,s}^{T-1} \ (s = 1, \ldots, T-3)$$

$$h_{T-2}^{T-2} = k_{T-2} + p_{T-2}^{T-1} \quad und \quad d_{T-2} = c_{T-2} + r_{T-1}$$

Die optimale Entscheidung $\hat{u}_{T-2}$ wird analog zu (23) berechnet, indem *T* durch *T-1* ersetzt wird. Die optimale Verlustfunktion der Periode *T-2* (genauer von *T-2* bis *T*) lautet dann:

$$(26) \qquad \hat{W}_{T-2} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-3} y_t' Q_{t,t}^{T-2} y_t + \sum_{t=1}^{T-3} \sum_{s<t} y_t' Q_{t,s}^{T-2} y_s$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-3} y_t' q_t^{T-2} + f_{T-2} + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-3} y_t' P_{t,t}^{T-1} y_t$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-3} \sum_{s<t} y_t' P_{t,s}^{T-1} y_s + \sum_{t=1}^{T-3} y_t' p_t^{T-1} + d_{T-2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-3} y_t' P_{t,t}^{T-2} y_t + \sum_{t=1}^{T-3} \sum_{s<t} y_t' P_{t,s}^{T-2} y_s$$

$$+ \sum_{t=1}^{T-3} y_t' p_t^{T-2} + r_{T-2}$$

$$mit\, P_{t,s}^{T-2} = Q_{t,s}^{T-2} + P_{t,s}^{T-1}$$

$$p_t^{T-2} = q_t^{T-2} + p_t^{T-1} \qquad \text{für } t = 1, \ldots, T-2;\ s \leq t$$

$$r_{T-2} = f_{T-2} + d_{T-2}$$

Dieses Verfahren läßt sich bis zur Bestimmung der optimalen Politik $\hat{u}_1$ der ersten Periode fortsetzen.

3.2 Analytische Aussagen über den Kontrollalgorithmus

Die Berücksichtigung aktiven Lernens impliziert in diesem Ansatz eine alternative Zielfunktion. Durch die Taylorreihenapproximation 2. Ordnung werden Kreuzprodukte von y_t und y_s für $t \neq s$ in den Optimierungsprozeß integriert, hierdurch wird ebenfalls die optimale Entscheidungsregel beeinflußt.

In den passiven adaptiven Entscheidungsmodellen, die zukünftiges Lernen nicht antizipieren, brauchen keine Approximationen bezüglich der Zielfunktion vorgenommen werden, da die optimale Verlustfunktion zu jedem Zeitpunkt eine quadratische Funktion bezüglich des vorhergehenden Systemzustands ist. Kreuzprodukte zeitlich unterschiedlicher Zustände werden dort nicht erzeugt. (Revisionen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der stochastischen Parameter werden ignoriert.)

Im obigen dualen Entscheidungsmodell kann die Taylorreihenapproximation über einen beliebigen Versuchspfad entwickelt werden. Oft wird jedoch die sicherheitsäquivalente oder eine passive adaptive Lösung des Entscheidungsproblems als erster Versuchspfad gewählt. Nachdem die optimalen Politiken mit dem approximativen Kontrollverfahren berechnet worden sind (durch Entwicklung der Erwartungen um den Versuchspfad), kann ein neuer Pfad von $y_1,...,y_{T-1}$ erzeugt werden, der dann als zweiter Versuchspfad für die Bestimmung einer neuen Lösung des Entscheidungsproblems verwendet wird. Dieses iterative Verfahren kann solange fortgesetzt werden, bis Konvergenz für die optimale Politik der ersten Periode vorliegt. Bei dieser Vorgehensweise ist jedoch aufgrund der beliebigen Wahl eines Versuchspfades nicht gewährleistet, daß die berechneten Politiken auch ein globales Optimum darstellen. Deshalb ist ein Suchverfahren notwendig.

Wie leicht gezeigt werden kann, sind das einfache stochastische (additiver Störterm) sowie das passive adaptive Entscheidungsmodell Vereinfachungen (Spezialfälle) dieses approximativen Kontrollalgorithmus.

Betrachten wir zunächst das passive adaptive Modell. Unter den Annahmen, daß die bedingten Erwartungen E_t für $t=1,...,T$ gleich E_0 gesetzt werden und so eine Revision der Verteilungen von A_t, B_t und C_t ausschließen, kann aus dem obigen Ansatz die optimale passive Entscheidungsregel abgeleitet werden (wir vergleichen nur das Verfahren zur Bestimmung der optimalen Politik für die erste Periode).

Als optimale Entscheidungsregel erhalten wir

(27) $$\hat{u}_t = G_t y_{t-1} + g_t \quad \text{für } t = 1, \ldots, T$$

$$\text{mit} G_t = -\left(E_0\left[B_t' H_t B_t\right]\right)^{-1}\left(E_0\left[B_t' H_t A_t\right]\right)$$

$$\text{und } g_t = -\left(E_0\left[B_t' H_t B_t\right]\right)^{-1}\left(E_0\left[B_t' H_t C_t\right] z_t + E_0\left[B_t'\right] h_t\right).$$

In der obigen Notation gilt:

$$H_t \equiv H_{t,t}^t \quad \text{und} \quad h_t \equiv h_t^t \qquad (H_{t,s}^t = 0 \text{ für } t = 1, \ldots, T-1;\ s<t)$$

Die minimale Verlustfunktion läßt sich in diesem Fall folgendermaßen darstellen:

$$(28)\quad \hat{W}_t = \frac{1}{2} y_{t-1}'\left(E_0\left[A_t'H_tA_t\right] + E_0\left[A_t'H_tB_tG_t\right]\right)y_{t-1}$$

$$y_{t-1}'\left(E_0\left[\left(A_t + B_tG_t\right)'\left(H_tC_tz_t + h_t\right)\right]\right)$$

$$+ \frac{1}{2} E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'H_t\left(B_tg_t + C_tz_t\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2} E_0\left[\varepsilon_t'H_t\varepsilon_t\right] + E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'\right]h_t + c_t$$

$$= \frac{1}{2} y_{t-1}'\left(E_0\left[A_t'H_tA_t\right] - E_0\left[A_t'H_tB_t\right]E_0\left[B_t'H_tB_t\right]^{-1}E_0\left[B_t'H_tA_t\right]\right)y_{t-1}$$

$$+ y_{t-1}'\left(E_0\left[A_t'H_tC_t\right]z_t + E_0\left[A_t'\right]h_t - E_0\left[A_t'H_tB_t\right]E_0\left[B_t'H_tB_t\right]^{-1}\right.$$

$$\left.\times\left[E_0[B_t'H_tC_t]z_t + E_0[B_t']h_t\right]\right) + \frac{1}{2} E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'H_t\right.$$

$$\left.\times\left(B_tg_t + C_tz_t\right)\right] + \frac{1}{2} E_0\left[\varepsilon_t'H_t\varepsilon_t\right] + E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'\right]h_t + c_t$$

Die optimale Verlustfunktion ist bereits quadratisch in y_{t-1}, deshalb ist keine Approximation notwendig. Mit der obigen Bezeichnungsweise folgt

$$(29) \qquad Q_{t-1} = Q^t_{t-1,t-1} = E_0\left[A_t'H_tA_t\right] - E_0\left[A_t'H_tB_t\right]$$

$$\times E_0\left[B_t'H_tB_t\right]^{-1}E_0\left[B_t'H_tA_t\right]$$

$$q_{t-1} = q^t_{t-1} = E_0\left[A_t'H_tC_t\right]z_t + E_0\left[A_t'\right]h_t - E_0\left[A_t'H_tB_t\right]$$

$$\times E_0\left[B_t'H_tB_t\right]^{-1}\left[E_0[B_t'H_tC_t]z_t + E_0[B_t']h_t\right]$$

$$r_t = \frac{1}{2}E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'H_t\left(B_tg_t + C_tz_t\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2}E_0\left[\varepsilon_t'H_t\varepsilon_t\right] + E_0\left[\left(B_tg_t + C_tz_t\right)'\right]h_t + c_t$$

sowie

$$Q^t_{ij} = P^t_{ij} = 0 \text{ für } i<t-1,\ j\leq i \text{ und } q^t_i = p^t_i = 0 \text{ für } i<t-1.$$

Hieraus folgt sofort, daß

$$Q^t_{t-1,t-1} = P^t_{t-1,t-1} \text{ und } q^t_{t-1} = p^t_{t-1}.$$

Für das einfache stochastische Entscheidungsmodell, d.h. wenn die unbekannten Parameter A_t, B_t und C_t als bekannt angenommen werden, also $E_0(A_t)=\bar{A}_t$, $E_0(B_t)=\bar{B}_t$ und $E_0(C_t)=\bar{C}_t$, ergeben sich analoge optimale Entscheidungsregeln bzw. Verlustfunktionen wie in (27) bzw. (28):

(30) $$\hat{u}_t = -\left(\bar{B}_t' H_t \bar{B}_t\right)^{-1} \left[\left(\bar{B}_t' H_t \bar{A}_t\right) y_{t-1} + \bar{B}_t' \left(H_t \bar{C}_t z_t + h_t\right)\right]$$

für $t = 1, \ldots, T$.

und

(31) $$\hat{W}_t = \frac{1}{2} y_{t-1}' Q_{t-1} y_{t-1} + y_{t-1}' q_{t-1} + r_t$$

$$mit\ Q_{t-1} \equiv Q^t_{t-1,t-1} = \bar{A}_t' H_t \bar{A}_t - \bar{A}_t' H_t \bar{B}_t (\bar{B}_t' H_t \bar{B}_t)^{-1} \bar{B}_t' H_t \bar{A}_t$$

$$q_{t-1} \equiv q^t_{t-1} = \bar{A}_t' H_t \bar{C}_t z_t + \bar{A}_t' h_t - \bar{A}_t' H_t \bar{B}_t (\bar{B}_t' H_t \bar{B}_t)^{-1}$$

$$\times \left[\bar{B}_t' H_t \bar{C}_t z_t + \bar{B}_t' h_t\right]$$

$$r_t = \frac{1}{2} \left(\bar{B}_t g_t + \bar{C}_t z_t\right)' H_t \left(\bar{B}_t g_t + \bar{C}_t z_t\right)$$

$$+ \frac{1}{2} E_o\left(\varepsilon_t' H_t \varepsilon_t\right) + \left(\bar{B}_t g_t + \bar{C}_t z_t\right)' h_t + c_t,$$

hier gilt auch $H_t \equiv H^t_{t,t}$, $h_t \equiv h^t_t$

$\Big($*analog zu* (29) *folgt* $Q^t_{ij} = P^t_{ij} = 0$ *für* $i < t-1,\ j \leq i$,

$q^t_i = p^t_i = 0$ *für* $i < t-1$ *und* $Q^t_{t-1,t-1} = P^t_{t-1,t-1}$ *sowie* $q^t_{t-1} = p^t_{t-1}\Big)$

Die Unterschiede der einzelnen Verfahren und somit die Auswirkungen der verschiedenen Unsicherheitsmaßnahmen können anhand der zu minimierenden Zielfunktionen verdeutlicht werden. Die Zielfunktionen differieren dabei jeweils (neben der Erwartungswertbildung) in den Riccati-Koeffizienten $H^t_{t,t}$ und h^t_t für $t = 1, \ldots, T-1$ sowie in einer

Konstanten, die aber bei der Ableitung der optimalen Entscheidung keine Bedeutung hat, sondern nur einen Beitrag zur optimalen Zielfunktion liefert.

Nur für die letzte Periode T stimmen die Koeffizienten $H^T{}_{T,T}$ bzw. $h^T{}_T$ in den drei verschiedenen Kontrollverfahren überein. Gleichung (21) impliziert, daß sich die Größen $H^t{}_{t,t}$ und $h^t{}_t (t=1,\ldots,T-1)$ jeweils aus zwei unterschiedlichen Komponenten zusammensetzen; die zu minimierenden Verlustfunktionen können zu jedem Zeitpunkt jeweils in eine gegenwärtige und eine zukünftige Komponente zerlegt werden. Die Koeffizienten $\bar{K}_t$ und k_t stellen dabei die Gewichte des Beitrags von y_t zur Zielfunktion dar, wenn y_t direkt in der zu minimierenden Verlustfunktion vorkommt; sie sind in den drei Kontrollalgorithmen jeweils identisch.
Der quadratische Term

$$\frac{1}{2} y_t' \bar{K}_t y_t + y_t' k_t$$

repräsentiert somit den gegenwärtigen Anteil von y_t an der Verlustfunktion. Die zweite Komponente von H_t und h_t besteht im einfachen sicherheitsäquivalenten Entscheidungsmodell aus dem Term

$$\frac{1}{2} y_t' Q_t y_t + y_t' q_t \quad mit\ Q_t\ und\ q_t\ wie\ in\ (31).$$

Diese quadratische Funktion stellt die minimalen Kosten der zukünftigen Zustandsentwicklung $y_{t+1},\ldots,y_T$ dar unter der Annahme, daß die zukünftigen Entscheidungen $u_{t+1},\ldots,u_T$ schon optimal bestimmt worden sind. Für die zukünftigen optimalen Entscheidungen wird y_t nur als Anfangsbedingung gewählt; die einzige Beziehung von y_t zur Zukunft besteht in der Beeinflussung der minimalen zukünftigen Kosten in der Periode $t+1$. Da $P^t{}_{i,j}=Q^t{}_{i,j}=0$ bzw. $p^t{}_i=q^t{}_i=0$ für $i,j < t-1$, hat y_t keine Auswirkungen auf die minimalen zukünftigen Kosten der Periode $t+2$ usw. Ein Vergleich der

quadratischen Komponenten der Zielfunktion bzw. der Koeffizienten $(\bar{K}_t, k_t)$ und (Q_t, q_t) zeigt die Bedeutung der gegenwärtigen und zukünftigen Kostenanteile, die mit dem Zustand y_t verbunden sind. Die optimale Entscheidung $\hat{u}_t$ wird dann bezüglich der Summe der beiden quadratischen Kostenanteile ausgewählt. Mit der obigen Bezeichnungsweise gilt hier:

$$(32) \qquad H_t \equiv H^t_{t,t} = \bar{K}_t + P^{t+1}_{t,t} = \bar{K}_t + Q^{t+1}_{t,t} = \bar{K}_t + Q_t$$

$$h_t \equiv h^t_t = k_t + p^{t+1}_t = k_t + q^{t+1}_t = k_t + q_t \qquad \text{für } t = 1, \ldots, T-1 .$$

Die Zielfunktion im passiven Entscheidungsmodell mit stochastischen Parametern kann analog dem sicherheitsäquivalenten Modell in zwei entsprechende Komponenten zerlegt werden, die Koeffizienten Q_t und q_t werden dabei wie in (27) berechnet. Die Interpretation ist zum einfachen stochastischen Modell äquivalent.

Auch im approximativen dualen Kontrollansatz bleibt die Zerlegung der zu minimierenden Zielfunktion in eine gegenwärtige und zukünftige Komponente erhalten. Jedoch sind die Effekte von y_t auf die optimalen zukünftigen Kosten wesentlich komplizierter, wie die folgende Darstellung zeigt [vgl. Chow (1975)].

$$(33) \qquad H_t \equiv H^t_{t,t} = \bar{K}_t + P^{t+1}_{t,t} = \bar{K}_t + Q^{t+1}_{t,t} + P^{t+2}_{t,t}$$

$$= \bar{K}_t + Q^{t+1}_{t,t} + Q^{t+2}_{t,t} + \ldots + Q^{T}_{t,t}$$

$$h_t \equiv h^t_t = k_t + p^{t+1}_t = k_t + q^{t+1}_t + p^{t+2}_t$$

$$= k_t + q^{t+1}_t + q^{t+2}_t + \ldots + q^T_t \qquad \text{für } t = 1, \ldots, T-1 .$$

Im Gegensatz zu den passiven Entscheidungsmodellen sind hier die Terme Q^t_{ii} bzw. q^t_i für $i<t-1$ ungleich Null, d. h. der Zustand y_t beeinflußt nicht nur die optimalen Kosten von der Periode $t+1$ an, er hat zusätzliche Auswirkungen auf die optimalen erwarteten zukünftigen Kosten, berechnet vom Zeitpunkt $t+2$, $t+3$ usw. Der aktive Lerneffekt impliziert also, daß y_t alle in der Zukunft liegenden optimalen erwarteten Kosten bis zum Ende des Optimierungszeitraums beeinflußt.

Ein Vergleich der Effekte von y_t auf die optimalen zukünftigen Kosten der Periode $t+1$ ($Q^{t+1}{}_{t,t}$, $q^{t+1}{}_t$) mit den entsprechenden Gewichten der anderen Optimierungsverfahren zeigt, daß die jeweiligen Größen Q_t bzw. q_t von denen im dualen Ansatz differieren, da dieser den Effekt von y_t auf die a posteriori Verteilungen der stochastischen Parameter mitberücksichtigt.

Die zukünftige Komponente der Zielfunktion, die durch die Ausdrücke $H_t-\bar{K}_t$ und h_t-k_t bestimmt ist, ermöglicht nun die Auswirkungen von y_t auf die optimalen erwarteten zukünftigen Kosten zu beurteilen, d.h. $H_t-\bar{K}_t$ und h_t-k_t stellen ein Kriterium dar, um die Effekte verschiedener Unsicherheitsannahmen auf die Gewichtung der zukünftigen Komponente der Zielfunktion vergleichen zu können. Ein Vergleich zwischen dem dualen und passiven adaptiven Kontrollansatz hinsichtlich der zukünftigen Komponente liefert uns ein Maß für den aktiven Lerneffekt in der Zukunft. Es ist anzunehmen, daß die Gewichtung der zukünftigen Komponente im dualen Entscheidungsalgorithmus wegen der aktiven Lernmöglichkeit größer sein wird als im passiven Kontrollansatz. Eine analytische Bestätigung dieser Annahme ist jedoch nicht möglich; es können nur die numerischen Werte bei der Ableitung der optimalen Politiken zu einer Untersuchung herangezogen werden.

3.3 Vereinfachungen (Spezialfälle des Kontrollalgorithmus)

Eine wesentliche Vereinfachung des obigen Kontrollalgorithmus besteht in der Verwendung einer modifizierten Taylorreihenapproximation bei der Bestimmung der optimalen Verlustfunktion in jeder Periode [vgl. hierzu Abel (1975)]. Das modifizierte Verfahren läuft analog zu dem obigen Ansatz, wobei jetzt jedoch die optimalen Kosten der einzelnen Perioden in (19), (24) und (26) durch eine Taylorreihe 2.Ordnung approximiert werden, die die gemischten Ableitungen vernachlässigt; in der obigen Bezeichnungsweise bedeutet dies: $Q^t_{i,j} = 0$ für $i \neq j$ und $t=1,...,T$. Dies impliziert für die Riccati-Koeffizienten $H^t_{t,s} = 0$ für $t \neq s$ und $t = 1,...,T-1$. Die Modifizierung der Taylorreihenapproximation hat so einen direkten Einfluß auf die Form der optimalen Entscheidungen. Die Feedbackkoeffizienten G_t sowie die konstanten Terme g_t für $t=1,...,$ $T-1$ haben nun die gleiche Form wie G_T und g_T in (18), wobei T durch t ersetzt wird. Die optimalen Entscheidungen sind jetzt nicht mehr direkt, sondern nur noch über die Erwartungswertbildung in (23) von allen zeitlich vorhergehenden Zuständen abhängig.

Die modifizierte Form der optimalen Entscheidungen impliziert für die Approximation der optimalen Verlustfunktion natürlich auch veränderte Koeffizienten; die Berücksichtigung von $H^{T-1}_{T-1,T-2}$ in (23) führt so zum Beispiel zu einem veränderten $Q^{T-1}_{T-2,T-2}$ in (24).

Dieser Kontrollansatz ist im Vergleich mit der verallgemeinerten Version wesentlich einfacher zu handhaben, da die Berechnung einer großen Anzahl zweiter Ableitungen wegfällt und so natürlich Rechenzeit eingespart wird. Chow bezeichnet dieses approximative Verfahren auch als Entscheidungsproblem mit teilweisem Lernen [vgl. Chow (1975)].

Für den Fall eines quadratischen nichtlinearen Entscheidungsmodells, d.h. Optimierung einer quadratischen Zielfunktion unter der Nebenbedingung eines nichtlinearen ökonometrischen Modells, hat Chow (1976, 1981) ein alternatives Approximationsverfahren entwickelt. Bei der Ableitung der optimalen Entscheidungsregel approximiert er das zugrundeliegende nichtlineare System durch eine Taylorreihe 1.Ordnung; das resultierende Kontrollproblem stellt dann ein lineares quadratisches Entscheidungsmodell dar, das mit dem obigen Verfahren gelöst werden kann.

3.4 Empirische Untersuchungen

Empirische Untersuchungen über den Einfluß alternativer Unsicherheitseffekte verwenden in den meisten Fällen sehr kleine ökonometrische Modelle. Anhand eines einfachen Eingleichungsmodells (eine Zustands- und eine Instrumentvariable) vergleicht Chow (1975) die folgenden Kontrollalgorithmen, wobei jeweils die optimale Entscheidung der ersten Periode berechnet wird:

a) sicherheitsäquivalentes Entscheidungsmodell,
b) stochastisches Entscheidungsmodell ohne Lernmöglichkeit (passiv),
c) stochastisches Entscheidungsmodell mit Lernmöglichkeit (aktiv).

Die Ergebnisse der Analyse zeigen, daß die verschiedenen Entscheidungsregeln zu fast gleichen Werten der optimalen Politik führen, d.h. die Berücksichtigung unterschiedlicher Unsicherheitseffekte impliziert hierbei keine bemerkenswerten Abweichungen der einzelnen optimalen Lösungen. Die Riccati-Koeffizienten H_t, die die Gewichtung der zukünftigen Komponente der zu minimierenden quadrati-

schen Verlustfunktion darstellen, zeigen, daß die Bedeutung der zukünftigen Komponenten mit der Einführung von Unsicherheit und möglichem Lerneffekt jeweils zunehmen (wachsende Koeffizienten von H_t). Bezüglich der "Feedback"-Koeffizienten existieren ebenfalls Unterschiede. Bei Unsicherheit ist der Koeffizient G_t im Zeitablauf jeweils kleiner als bei der sicherheitsäquivalenten Lösung, d.h. der Entscheidungsträger handelt im gewissen Sinne vorsichtiger (unter Unsicherheit). Der Koeffizient G_l sollte beim aktiven Lernalgorithmus betragsmäßig größer sein als im Modell ohne Lernmöglichkeit, da eine aktivere Politik erwartet wird; über g_l kann ebenfalls eine aktivere Politik in das System implementiert werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß trotz unterschiedlicher Reaktionskoeffizienten die optimalen Politiken annähernd übereinstimmen. Der geringe Einfluß der Unsicherheitseffekte kann eventuell dadurch erklärt werden, daß einerseits die Standardfehler der geschätzten Koeffizienten klein sind im Vergleich zu den a priori-Schätzungen der unbekannten Parameter und andererseits der Schätzzeitraum verglichen mit dem Optimierungszeitraum relativ lang ist.

Ein weiteres Anwendungsbeispiel des adaptiven Lernalgorithmus von Chow liefert Abel (1975) in seiner Untersuchung über die relative Effizienz der Geld- und Fiskalpolitik. Das zugrundeliegende ökonometrische System besteht hierbei aus einem Zweigleichungsmodell mit zwei Instrumentvariablen. Die Ergebnisse zeigen, daß die optimalen Instrumenteinsätze nicht sehr auf die Einführung von Unsicherheiten bzw. Lernmöglichkeiten reagieren. Die Aussagen über die Reaktionskoeffizienten der Entscheidungsregeln sowie die Bedeutung der Zukunftskomponente stimmen mit den obigen Resultaten überein. Wenn die Standardfehler der geschätzten Koeffizienten größer ge-

wählt werden, kann die Berücksichtigung von Unsicherheitseffekten zu alternativen, verbesserten optimalen Entscheidungsregeln führen. Es stellt sich dann jedoch die Frage, ob nicht Spezifikationsfehler bei der Modellierung des ökonometrischen Systems vorliegen.

4. Adaptive "closed-loop"-Kontrolle (der TBM-Ansatz)

4.1 Der allgemeine Kontrollalgorithmus

Ein weit verbreiteter adaptiver Kontrollansatz, der aktives Lernen bei der Ableitung optimaler Entscheidungsregeln berücksichtigt, ist der sogenannte "wide-sense dual control"-Algorithmus von Tse, Bar-Shalom und Meier (1973) [vgl. auch Tse et al. (1973), Bar-Shalom und Tse (1975), (1976), Tse und Bar-Shalom (1973) und Kendrick (1981)][1). Dieser kontrolltheoretische Ansatz wird dadurch charakterisiert, daß das Entscheidungsproblem bei Beibehaltung der "closed loop"-Eigenschaft in drei Komponenten zerlegt wird:
(i) gegenwärtige Kontrolle, (ii) zukünftige deterministische Kontrolle und (iii) zukünftige stochastische Kontrolle (Perturbationskontrolle), wobei die Perturbationskomponente in einen Vorsichts- oder Sicherheitsterm ("caution-term") und einen Experimentier- oder Prüfterm ("probing-term") aufgespalten wird. Hiermit kann der zukünftige Nutzen hinsichtlich des Lernprozesses erfaßt werden. Die gegenwärtige Politik kann zukünftige Unsicherheiten der Zustände und Parameter beeinflussen bzw. manipulieren, d.h. es liegt aktives Lernen vor.

---

1) Sowie Bar-Shalom, Tse und Larson (1974).

Der folgende Kontrollalgorithmus unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten vom "TBM"-Ansatz. Wir unterstellen ein Zustandsmodell, in dem der Zustand der Periode t direkt von der gegenwärtigen Entscheidung u_t beeinflußt wird, im Gegensatz zum "TBM"-Ansatz, wo die gegenwärtige Zustandsentwicklung nur von der um eine Periode verzögerten Entscheidung u_{t-1} kontrolliert werden kann. Außerdem wird die Zielfunktion im folgenden Verfahren vereinfacht; eine direkte Gewichtung der Instrumentvariablen wird nicht explizit vorgenommen, der Vektor der Zustandsvariablen wird um die Instrumenvariablen erweitert.

Im folgenden legen wir wieder das allgemeine linear quadratische Entscheidungsmodell zugrunde, zusätzlich wird angenommen, daß die Zustände nicht direkt beobachtbar sind, also mit Meßfehlern behaftet sind. Meßfehler werden bei der Anwendung kontrolltheoretischer Verfahren auf ökonomische Probleme in der Literatur nur sehr selten berücksichtigt, obwohl gerade in den ökonomischen Statistiken Meßfehler enthalten sind.

Gesucht ist die optimale Entscheidungsregel $\hat{u}_t$ $(t = 1,...,T)$, die den Erwartungswert der quadratischen Verlustfunktion

$$(34) \qquad W = E\left[\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - a_t\right)' K_t\left(y_t - a_t\right)\right]$$

minimiert unter der Nebenbedingung des Zustandsmodells:

$$(35) \qquad y_t = A_t(\theta_t)\,y_{t-1} + B_t(\theta_t)\,u_t + C_t(\theta_t)\,z_t + \varepsilon_t\,, \quad t = 1,\dots,T.$$

Die Meßgleichung lautet dann dementsprechend:

(36) $$s_t = D_t(\theta_t) y_t + v_t\,, \quad t = 1,\ldots,T.$$

θ_t sei hierbei ein Vektor, der die unbekannten (konstanten bzw. zeitvariablen) Parameter des Modells enthält, sie sollen linear in A, B, C und D eingehen. Wenn perfekte Beobachtungen unterstellt werden, ist $D_t(\theta_t)=I$ und $v_t \equiv 0$ (I ist Einheitsmatrix).

Zusätzlich wird angenommen, daß die Zufallskoeffizienten θ_t einem Markov Prozeß 1. Ordnung folgen; es gilt:

(37) $$\theta_t = F_t\,\theta_{t-1} + \eta_t\,,$$

wobei F_t eine bekannte Matrix und η_t eine Zufallsvariable ist. Weiterhin wird hier unterstellt, daß die Vektoren ε, v, η, y_0 und θ_0 gegenseitig unabhängige normalverteilte Zufallsvektoren sind mit bekannten Erwartungswerten und Varianz-Kovarianz Matrizen

$$Q_t^{\varepsilon},\ R_t^{v},\ M_t^{\eta}, \Sigma_0^{y},\ \Sigma_0^{\theta} \geq 0$$

(d. h. positiv semidefinit).

Ein Lösungsansatz besteht nun darin, die stochastischen Parameter als zusätzliche Zustandsvariablen zu definieren. Wir erhalten dann ein neues Entscheidungsproblem mit w_t als erweitertem Zustandsvektor. [Norman (1976) löst das Problem, ohne den Zustandsvektor zu erweitern, dabei unterstellt er exakte Beobachtungen]:

(38) $$w_t = \begin{bmatrix} y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} \quad und \quad e_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix}.$$

Das erweiterte Zustandsmodell lautet:

(39) $$\begin{bmatrix} y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_t(\theta_t) & 0 \\ 0 & F_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \theta_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_t(\theta_t) \\ 0 \end{bmatrix} u_t + \begin{bmatrix} C_t(\theta_t) \\ 0 \end{bmatrix} z_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \eta_t \end{bmatrix}.$$

Da hier Produkte von Zufallsvariablen vorkommen, kann das System nur als nichtlineare Zustandsgleichung dargestellt werden[1], d. h.:

(40) $$w_t = f_t\left(w_t, w_{t-1}, u_t\right) + e_t.$$

Die Varianz-Kovarianz Matrix von e_t bezeichnen wir im folgenden mit Q_t.
Die nichtlineare Funktion $f_t(w_t, w_{t-1}, u_t)$ soll hierbei schon die Produkte von z_t mit Elementen des Parametervektors θ_t enthalten. Aus

(41) $$s_t = \begin{bmatrix} D_t(\theta_t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ \theta_t \end{bmatrix} + v_t$$

folgt die nichtlineare Meßgleichung: $s_t = d_t(w_t) + v_t$ mit s_t Meßvektor, d_t Meßfunktion und v_t Meßfehlerterm. Die Schätzung des Zustandsvektors w_t stellt ein nichtlineares Filterproblem dar. Die gesuchten Schätzwerte für den bedingten Erwartungswert $\hat{w}_{t/t} = E_t[w_t]$ und die Kovarianzmatrix $\Sigma_{t/t}$ (diese Schreibweise bedeutet: die Kovarianz des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t, geschätzt mit Daten, die bis zum Zeitpunkt t verfügbar sind) können mit Hilfe verschiedener approximativer Methoden berechnet werden, vorwiegend werden hierbei der "erweiterte Kalman-Filter"

---

1) Ausnahme, wenn in A keine unsicheren Parameter vorkommen.

[vgl. Sorenson (1966), Bucy (1965), Jazwinski (1970)], der "adaptive Filter" [vgl. Jazwinski (1970), Tse et al. (1973)], Filter zweiter Ordnung [Tse et al. (1973)] oder der "Optimum Filter" [Bucy und Sennes (1970), Alspach und Sorenson (1970)] verwendet.

Die aktualisierten ("updated") Schätzwerte $\hat{w}_{t/t}$ und $\Sigma_{t/t}$ sollen eine Approximation des aktuellen Informationsstandes zum Zeitpunkt t darstellen; die in t zur Verfügung stehende Informationsmenge wird also nur durch die Momente erster und zweiter Ordnung der Zustandsschätzung charakterisiert. Tse, Bar-Shalom und Meier bezeichnen

$$P^t = \left\{ \hat{w}_{t/t}, \Sigma_{t/t} \right\}$$

als approximativen "wide-sense"-Informationszustand; die Dimension des Informationszustandes bleibt so für alle t konstant.

Um den adaptiven Kontrollalgorithmus zu verdeutlichen, wird angenommen, daß sich das System im Zeitpunkt $t-1$ befindet, d.h. der Entscheidungsträger hat Informationen bis zum Zeitpunkt $t-1$ (einschließlich) zur Verfügung. Die Methode der dynamischen Programmierung verlangt nun, eine optimale Politik u_t zu finden, die den folgenden Ausdruck minimiert:

$$\text{(42)} \qquad \hat{W}_t = \min_{u_t} E\left[\left(w_t - a_t \right)' K_t \left(w_t - a_t \right) + \hat{W}_{t+1} \,\middle|\, P^{t-1} \right] \quad ,$$

$$\hat{W}_t = min_{u_t} E_{t-1}\left[\left(w_t - a_t\right)' K_t\left(w_t - a_t\right) + \hat{W}_{t+1}\right].$$ [1)]

Das Hauptproblem besteht nun darin, einen approximativen Ausdruck für $\hat{W}_{t+1}$ bei gleichzeitiger Berücksichtigung der "closed-loop"-Eigenschaft zu erhalten. Dazu wird ein Nominalpfad gewählt, der es erlaubt, den optimalen zukünftigen Nutzen $\hat{W}_{t+1}$ (cost-to-go) in einen deterministischen und einen stochastischen Teil zu entwickeln. Der stochastische Ausdruck stellt dabei ein approximatives linear quadratisches Problem dar.

Als Nominalpfad der zukünftigen Zustandsentwicklung verwenden wir die sicherheitsäquivalente Lösung $w_{0i} (i=1,..., T)$, der Nominalpfad erfaßt natürlich auch die optimalen Kontrollen für die Perioden $t+1,...,T$, die sich durch die Minimierung der Verlustfunktion für die Perioden $t+1,...,T$ ergeben, wenn alle Zufallsvariablen gleich ihren Erwartungswerten gesetzt werden. Die Wahl einer zukünftigen nominalen Politik ist im gewissen Sinne fiktiv, da sie in der Zukunft nicht tatsächlich angewendet wird; sie dient lediglich zur Approximation der optimalen "cost-to-go". Um aber die sicherheitsäquivalente Lösung bestimmen zu können, benötigen wir als Anfangsbedingung den Wert w_t. Dieser Zustandsvektor hängt aber gerade vom gegenwärtig gesuchten Wert für u_t ab; zu jedem Versuchswert von u_t gehören unterschiedliche Nominalpfade. Normalerweise wird der Suchprozeß nach der optimalen Kontrolle $\hat{u}_t$ mit der sicherheitsäquivalenten Kontrollregel begonnen, deshalb ist zuerst die Lösung des sichereitsäquivalenten Entschei-

1) Wobei jetzt a_t bzw. K_t um 0 erweiterte Vektoren bzw. Matrizen darstellen.

dungsproblems für den Zeitraum t bis T notwendig. Dieser Schritt wird im Optimierungsprozeß oft als Initialisierungsphase bezeichnet.

Als Schätzwert für w_t verwenden wir $\hat{w}_{t/t-1}$, den erwarteten Wert des Zustandsvektors zum Zeitpunkt t bei gegebener Informationsmenge P^{t-1} und Versuchspolitik u^{v}_{t}. Bei der Berechnung von $\hat{w}_{t/t-1}$ wird das nichtlineare Gleichungssystem $w_t=f_t(w_t,w_{t-1},u_t)+e_t$ als Taylorreihe 2. Ordnung um $\hat{w}_{t-1/t-1}$ (der gegenwärtigen Zustandsschätzung) und u^{v}_{t} (der gegenwärtigen Versuchspolitik) entwickelt. Der gesuchte Schätzwert $\hat{w}_{t/t-1}$ ergibt sich dann durch die nachfolgende Erwartungswertbildung bzgl. der vorliegenden Information (bis zum Zeitpunkt $t-1$).

Anschließend wird der Schätzwert $\hat{w}_{t/t-1}$ als Anfangsbedingung für die Lösung des sicherheitsäquivalenten Problems benutzt, um den Nominalpfad w_{0i} $(i = t+1, \ldots, T)$ zu bestimmen. Da es sich hier um ein nichtlineares Entscheidungsproblem handelt, müssen nichtlineare Lösungsalgorithmen [konjugierte Gradientenmethode (Kendrick und Taylor 1970), für alternative Algorithmen siehe Athans (1972)] zur Berechnung der optimalen sicherheitsäquivalenten Politiken herangezogen werden. Der optimale zukünftige Nutzen in der Periode $t+1$ ist eine Funktion der approximierten Informationsmenge:

$$(43) \qquad \hat{W}_{t+1} = \min_{u_{t+1}} E_t \left[\ldots \min_{u_t} E_{t-1} \left[Z_{t+1} \right] \ldots \right]$$

$$\text{mit } Z_{t+1} = \sum_{i=t+1}^{T} \left(w_i - a_i\right)' K_i \left(w_i - a_i\right).$$

Mit Hilfe des Nominalpfades w_{oi} ist es möglich, z_{t+1} in eine deterministische (von u_{t+1} unabhängige) Komponente sowie in einen stochastischen Teil zu zerlegen.

(44) $$Z_{t+1} = Z_{ot+1} + \Delta Z_{t+1}$$

$$mit\ Z_{ot+1} = \sum_{i=t+1}^{T} \left(w_{oi} - a_i\right)' K_i \left(w_{oi} - a_i\right),$$

$$\Delta Z_{t+1} = \sum_{i=t+1}^{T} \left[\Delta w_i' K_i \Delta w_i + 2\left(w_{oi} - a_i\right)' K_i \Delta w_i\right]$$

$$und\ \Delta w_i = \left(w_i - w_{oi}\right), \quad \Delta u_i = \left(u_i - u_{oi}\right).$$

Dabei stellen z_{ot+1} die Kosten bzgl. des Nominalpfades und Δz_{t+1} die Variation der Kosten über den Nominalpfad dar. Der optimale "cost-to-go" Term kann mit der obigen Zerlegung folgendermaßen geschrieben werden:

(45) $$\hat{W}_{t+1} = min_{u_{t+1}} E_t \left[...min_{u_T} E_{T-1}[Z_{t+1}]... \right] = Z_{ot+1} + \Delta\hat{W}_{t+1}$$

$$mit\ \Delta\hat{W}_{t+1} = min_{\Delta u_{t+1}} E_t \left[...min_{\Delta u_T} E_{T-1}[\Delta Z_{t+1}]... \right].$$

Wir erhalten hier ein separates Optimierungsproblem mit quadratischer Zielfunktion (das sogenannte "Perturbations-problem"). Die Nebenbedingung der Minimierung folgt aus der Taylorreihenapproximation 2. Ordnung des ursprünglichen Systems, wobei jetzt jedoch die Perturbationsform des Gleichungssystems (Schreibweise: $\Delta w_t = w_t - w_{ot}$) Verwendung findet.

Das vorliegende Kontrollproblem besteht nun aus der Minimierung einer quadratischen Funktion bzgl. eines quadratischen Systems und ist, wie Bar-Shalom und Tse zeigen, dem linear quadratischen Entscheidungsproblem ähnlich. Bei Berücksichtigung von Termen bis zu zweiter Ordnung kann die Lösung des Problems als quadratische Form dargestellt werden:

$$(46) \qquad \Delta\hat{W}_{t+1} = \beta_{t+1} + E_t \left[h_{t+1}{}' \Delta w_t + \Delta w_t{}' H_{t+1} \Delta w_t \right].$$

β, h und H sind Parameter, die rekursiv aus dem Entscheidungsproblem berechnet werden können. Die optimalen Kosten $\Delta\hat{W}_{t+1}$ sind hier also eine quadratische Funktion der Systemzustände der gegenwärtigen Periode t. Die zugehörige optimale Entscheidung Δu_{t+1} (optimale Perturbationskontrollregel) läßt sich hierbei als lineare Funktion von $\Delta\hat{w}_{t/t}$ darstellen, d. h.

$$(47) \qquad \Delta u_{t+1} = G_t \Delta\hat{w}_{t/t} + g_t .$$

Wir verzichten hier auf die Darstellung der Koeffizienten G_t bzw. g_t; sie können rekursiv im Planungszeitraum berechnet werden. Die optimalen Perturbationskosten (Gleichung 46) können unter Verwendung zukünftiger Unsicherheiten umgeformt werden in [siehe Bar-Shalom und Tse (1976), Kendrick (1981)]:

(48)
$$\Delta\hat{W}_{t+1} = \gamma_{t+1} + E_t\left[h_{t+1}'\Delta w_t + \Delta w_t' H_{t+1}\Delta w_t\right]$$

$$+ \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[L_i Q_i + N_{i-1}\Sigma_{i-1/i-1}\right]$$

$$mit \quad \beta_{t+1} = \gamma_{t+1} + \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[L_i Q_i + N_{i-1}\Sigma_{i-1/i-1}\right].$$

L_t und N_t sind Koeffizientenmatrizen, die sich rekursiv berechnen lassen. Q_t stellt die Varianz-Kovarianzmatrix des Störterms des erweiterten Gleichungssystems dar und

(49)
$$\Sigma_{t/t} = E_t\left[\left(\Delta w_t + \Delta\hat{w}_{t/t}\right)\left(\Delta w_t + \Delta\hat{w}_{t/t}\right)'\right]$$

$$= E_t\left[\left(w_t - \hat{w}_{t/t}\right)\left(w_t - \hat{w}_{t/t}\right)'\right]$$

$$und \quad E_t\left[\Delta w_t' N_t \Delta w_t\right] = \Delta\hat{w}_{t/t}' N_t \Delta\hat{w}_{t/t} + tr\left[N_t \Sigma_{t/t}\right].$$

Setzen wir nun (48) bzw. (45) in (42) ein, so ergibt sich für den Zeitpunkt t folgende "closed-loop optimal expected cost-to-go":

(50)
$$\hat{W}_t = min_{u_t} E_{t-1}\left[\left(w_t - a_t\right)' K_t \left(w_t - a_t\right) + Z_{ot+1} + \gamma_{t+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[L_i Q_i + N_{i-1}\Sigma_{i-1/i-1}\right] + E_t\left[h_{t+1}'\Delta w_t + \Delta w_t' H_{t+1}\Delta w_t\right]\right].$$

Da für die Informationsmengen $P^t \supset P^{t-1}$ gilt, folgt

(51) $$E_{t-1}\left[E_t\left[h_{t+1}'\Delta w_t + \Delta w_t' H_{t+1}\Delta w_t\right]\right] = E_{t-1}\left[h_{t+1}'\Delta w_t + \Delta w_t' H_{t+1}\Delta w_t\right].$$

Zusätzlich gilt noch

(52) $$E_{t-1}\left[\Delta w_t\right] = E_{t-1}\left[w_t - w_{ot}\right] = E_{t-1}\left[w_t - \hat{w}_{t/t-1}\right] = 0$$

$$und\ E_{t-1}\left[\Delta w_t' H_{t+1}\Delta w_t\right] = \Delta\hat{w}_{t/t-1}' H_{t+1}\Delta\hat{w}_{t/t-1} + tr\left[H_{t+1}\Sigma_{t/t-1}\right]$$

$$= tr\left[H_{t+1}\Sigma_{t/t-1}\right],\quad da\quad \Delta\hat{w}_{t/t-1} = 0.$$

Einsetzen von (52) in (50) liefert, wenn gleichzeitig der Erwartungswert gebildet wird und nur von u_t abhängige Terme berücksichtigt werden:

(53) $$\hat{W}_t = min_{u_t}\left[\left(w_{ot} - a_t\right)' K_t\left(w_{ot} - a_t\right) + Z_{ot+1} + \gamma_{t+1}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[L_i Q_i + N_{i-1}\Sigma_{i-1/i-1}\right] + tr\left[H_t\Sigma_{t/t-1}\right]\right]^{1)}$$

Der Ausdruck der approximativen optimalen Kosten kann also in drei Komponenten zerlegt werden [siehe Bar-Shalom und Tse (1976)]:

1) $w_{ot} = \hat{w}_{t/t-1}$

(54) $$\hat{W}_t = min_{u_t} \left[W_{tD} + W_{tC} + W_{tP} \right]$$

mit einer deterministischen Komponente (gegenwärtige und zukünftige)

(a) $$W_{tD} = \sum_{i=t}^{T} \left(w_{oi} - a_i\right)' K_i \left(w_{oi} - a_i\right) + \gamma_{t+1}$$

$$= \sum_{i=t}^{T} \left(w_{oi} - a_i\right)' K_i \left(w_{oi} - a_i\right)^{1)},$$

einer Sicherheitskomponente

(b) $$W_{tC} = tr\left[H_t \Sigma_{t/t-1}\right] + \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[L_i Q_i\right]$$

und einer Prüfkomponente

(c) $$W_{tP} = \sum_{i=t+1}^{T} tr\left[N_{i-1} \Sigma_{i-1/i-1}\right].$$

Hierbei enthält W_{td} neben den gegenwärtigen deterministischen Kosten auch die zukünftigen deterministischen Kosten (bzgl. des Nominalpfades), d.h. die deterministischen Kosten sind nur eine Funktion der gesuchten optimalen Politik $\hat{u}_t$ und des Nominalpfades; Kovarianzterme haben keinen Einfluß auf die deterministische Komponente.

---

1) Kendrick (1981) zeigt, daß hier $\gamma = 0$ gilt.

Die stochastischen Einflüsse der Kontrolle auf die Zielfunktion werden durch die Sicherheitskomponente und den Prüfterm dargestellt. Die Sicherheitskomponente ist sowohl eine Funktion der Kovarianzmatrix der Zustandsvariablen (erweiterter Vektor) zum Zeitpunkt t vorhergesagt mit verfügbaren Daten zum Zeitpunkt $t-1$: $\Sigma_{t/t-1}$, als auch eine Funktion der Kovarianzen der Störterme des Gleichungssystems bzgl. zukünftiger Perioden. Die Unsicherheitsterme $Q_{t+1},...,Q_T$ können durch u_t nicht beeinflußt werden, nur ihre Gewichte hängen von der Wahl bzgl. u_t ab. Die Kovarianzmatrix $\Sigma_{t/t-1}$ stellt also die Unsicherheit der Systemzustände bei Anwendung einer Politik u_t dar, bevor die Systemzustände im Zeitpunkt t wieder beobachtet werden können. Die Bezeichnung "caution term" kommt daher, daß der Entscheidungsträger unsicher über die Größe der Systemreaktion ist und deshalb eine konservativere (vorsichtigere) Politik wählt. Die Kovarianzmatrizen Q sollten besser als separate Komponente behandelt werden, da sie, wie Kendrick (1981) feststellt, nicht in dieses Konzept passen.

Der Prüfterm erfaßt Unsicherheitseffekte, die durch nachfolgende Entscheidungen verursacht werden. Die Bezeichnung "probing term" soll hierbei verdeutlichen, daß durch Experimentieren zu Beginn des Planungszeitraumes Unsicherheiten hinsichtlich zukünftiger (späterer) Kovarianzmatrizen $\Sigma_{i/i}$ reduziert werden können. Die Gewichtungsmatrix N_i wird auch der "Wert zukünftiger Information" genannt.

Die Berechnung der zukünftigen Kovarianzmatrizen $\Sigma_{i/i}$ ("projecting") geschieht hier durch sukzessive Anwendung des Kalman Filters. Dieser Prozeß ist vom sogenannten "updaten" zu unterscheiden, obwohl in beiden Fällen der gleiche Ansatz verwendet wird.

Tse, Bar-Shalom und Meier benutzen jeweils einen Kalman Filter zweiter Ordnung. Das "updaten" wird nur einmal pro Zeitpunkt durchgeführt, während die Anzahl der "projecting" Vorgänge von der Zahl der Suchschritte in einem Zeitpunkt abhängt.

Die Minimierung der Zielfunktion $\hat{W}_t$ ermöglicht nun einen Kompromiß zwischen den einzelnen Komponenten, d.h. es findet ein Ausgleich zwischen dem zukünftigen Nutzen bei Berücksichtigung zusätzlicher (zukünftiger) Informationen (Lerneffekt) und den Kosten der gegenwärtigen Kontrolle statt.

Zur Lösung des Entscheidungsproblems im Zeitpunkt t werden wiederholt verschiedene Werte für u_t gewählt, für die dann jeweils die approximativen "cost-to-go" Funktionen berechnet werden. Da u_t in den meisten Fällen einen mehrdimensionalen Vektor darstellt, können zur Bestimmung der optimalen Entscheidungsregel Gradientenverfahren oder "grid search" Methoden herangezogen werden. Hierbei müssen jedoch verschiedene Startpunkte gewählt werden, weil mehrere lokale Optima auftreten können [siehe hier z.B. Kendrick (1981)]. Diese Verfahren werden solange fortgesetzt, bis Konvergenz erreicht ist.

Anschließend wird die optimale Entscheidung $\hat{u}_t$ zusammen mit dem additiven Störterm e_t, der durch eine Monte Carlo Prozedur mit Hilfe der Kovarianzmatrix Q_t erzeugt wird (dementsprechend werden auch die restlichen Zufallsvariablen erzeugt), benutzt, um w_t zu berechnen. Der Zustand w_t wird wieder in die Meßgleichung eingesetzt (zusammen mit einem erzeugten Wert für v_t), um s_t zu bestimmen. Der Meßvektor s_t wird schließlich in einem erweiterten Kalman Filter Ansatz verwendet, um aktualisierte ("updated") Schätzwerte für den Erwartungswert $\hat{w}_{t/t}$ und die Varianz $\Sigma_{t/t}$ zu ermitteln, die dann den Informationszustand für die

Bestimmung der optimalen Entscheidungsregel $\hat{u}_{t+1}$ darstellen.

Der obige adaptive Kontrollalgorithmus kann so in jedem Zeitpunkt in drei verschiedene Schritte (Prozeduren) unterteilt werden. An die Initialisierung des Suchprozesses (im allgemeinen die Bestimmung der optimalen sicherheitsäquivalenten Entscheidungsregel für die Periode t) schließt sich der eigentliche Suchprozeß an; dieser iterative Prozeß besteht hauptsächlich aus der Berechnung der optimalen "cost-to-go" Komponenten, die mit Hilfe eines Nominalpfades (sicherheitsäquivalente Lösung für den Zeitraum $t+1$ bis T) entwickelt werden können. Die Riccati Koeffizienten werden rekursiv im Planungszeitraum berechnet, das "projecting" der Kovarianzen wird dagegen vorwärts im Optimierungszeitraum durchgeführt.

Nachdem Konvergenz vorliegt (Gradientenverfahren) oder alle Suchpunkte entwickelt worden sind ("grid search"), wird das "updating" durchgeführt, um aktualisierte Schätzwerte der Zustände und Parameter für die folgende Periode $t+1$ zu erhalten.

Diese drei Schritte werden für jeden Zeitpunkt bis zur letzten Periode wiederholt.

Um aber Vergleiche mit anderen Kontrollmethoden vornehmen zu können, muß eine Vielzahl von Monte Carlo Läufen, in denen die erforderlichen Zufallsterme des Entscheidungsproblems erzeugt werden, durchgeführt werden; wegen der benötigten Rechenzeit ist dieses Vorgehen aber sehr kostenintensiv, man beschränkt sich deshalb auf nur wenige Monte Carlo Läufe.

4.2 Vereinfachungen des Kontrollansatzes

Die empirische Anwendung des TBM-Ansatzes führt in der Praxis aufgrund der notwendigen umfangreichen Berechnungen bei großen Modellen zu rechentechnischen Schwierigkeiten (Rechenzeit, Speicherplatz). Um diese Probleme zu vermeiden, können bestimmte Vereinfachungen im Approximationsverfahren vorgenommen werden. So verwendet Norman (1976, 1979) im Gegensatz zum TBM-Ansatz nur Momente erster Ordnung; Momente zweiter Ordnung, die die Kovarianzen zwischen den Zustandsvariablen und den stochastischen Parametern betreffen, werden bei der Ableitung der zukünftigen Perturbationskomponente vernachlässigt. Zusätzlich unterstellt Norman, daß die Zustandsvariablen ohne Meßfehler beobachtet werden können, d.h. sie werden exakt gemessen. Die Anwendung des TBM-Ansatzes bei exakten Beobachtungen ist nach Norman (1979) inkonsistent mit dem Konzept, daß alle Terme bis 2. Ordnung bei der Entwicklung der stochastischen "cost-to-go" Komponente verwendet werden. Norman untersucht zwei alternative Vorgehensweisen hinsichtlich einer "first order"-Methode. Dabei zeigt sich, daß die Version, in der die unbekannten Parameter in den Zustandsvektor integriert werden, der "nicht integrierten" Version statistisch sowie rechentechnisch unterlegen ist.

Die Aufteilung des Entscheidungsproblems in drei Komponenten (gegenwärtige Kontrolle, zukünftige deterministische und zukünftige Perturbationskontrolle) bleibt auch bei den approximativen dualen Verfahren erster Ordnung erhalten.

Der TBM-Ansatz unterscheidet sich vom Chow-Algorithmus durch mehrere Annahmen. So unterstellt der Chow-Ansatz, daß die Zustandsvariablen perfekt gemessen werden. Die Bewertung der Verluste wird dabei durch eine sehr allgemeine quadratische Zielfunktion vorgenommen, die auch im Gegensatz zum TBM-Kontrollalgorithmus Kreuzprodukte unterschiedlicher Zeitperioden berücksichtigt. Ein wesentlicher Unterschied liegt in dem Verfahren, wie die Taylorreihenapproximationen zweiter Ordnung entwickelt werden. Im Chow-Algorithmus wird der Ver-

suchspfad exogen vorgegeben, im TBM-Ansatz ist die Berechnung des Pfades endogen; nach jeder Iteration wird der Pfad neu bestimmt. Außerdem werden im Chow-Ansatz die Erwartungswerte vor dem Approximationsverfahren gebildet, während bei Tse, Bar-Shalom und Meier die umgekehrte Reihenfolge gilt; d.h. vor der Erwartungswertbildung wird dort die Zielfunktion durch eine Taylorreihe 2. Ordnung approximiert.

4.3 Empirische Anwendungen

Bar-Shalom und Tse (1976) sowie Kendrick (1981) zeigen anhand eines einfachen Entscheidungsmodells unter Verwendung des TBM-Ansatzes die unterschiedliche Bedeutung der einzelnen Komponenten der optimalen "cost-to-go" Terme. Ausgangspunkt der Untersuchungen ist das sogenannte "MacRae Problem" [siehe hierzu MacRae (1972)], ein eindimensionales Modell mit unbekanntem, zeitinvariantem Koeffizienten bzgl. der Instrumentvariable, perfekt gemessenen Systemzuständen und einem Optimierungszeitraum von 2 Perioden.

Die deterministische Komponenten, die man erhält, wenn die sicherheitsäquivalente Lösung als Nominalpfad (Entwicklungspfad) genommen wird, überwiegt hierbei die beiden stochastischen Komponenten eindeutig. Die Sicherheitskosten stellen eine monoton steigende Funktion der Entscheidung in der ersten Periode dar; d.h. bei steigendem Instrumenteneinsatz nimmt der Sicherheitsanteil zu; aufgrund des unbekannten Instrumentenkoeffizienten vergrößert sich die Unsicherheit. Die Prüfkosten (experimentelle Komponente) sind dagegen eine monoton fallende Funktion in der ersten Periode; eine Zunahme des Politikeinsatzes impliziert abnehmende Prüfkosten und somit genauere Schätzungen für die folgende Periode. Das Verhalten der stochastischen Komponenten verläuft (in der ersten Periode) entgegengesetzt. In diesem Fall liegt der optimale Politikeinsatz der ersten Periode unterhalb der deterministischen Lösung, da die Sicherheitskosten bei weitem die Prüfkosten übersteigen.

Kendrick (1981) erweitert das Modell, indem er auch die übrigen Koeffizienten als unbekannt annimmt und den Planungszeitraum variiert. Die obigen Aussagen über die Bedeutung der Komponenten in der Zielfunktion verlieren im erweiterten Modell jedoch ihre Gültigkeit. Aussagen sind jeweils nur problemspezifisch möglich, d.h. sie hängen von der Spezifizierung des Entscheidungsmodells (Unsicherheitsannahmen, Planungszeitraum etc.) sowie von der Durchführung der Monte Carlo Simulationen ab.

Als weiteres Anwendungsbeispiel untersucht Kendrick ein kleines ökonometrisches Modell der USA, das aus zwei Zustands- und zwei Kontrollvariablen besteht, sowie zehn unbekannten Parametern, wobei auch Meßfehler zugelassen sind. Die stochastischen Parameter werden als unbekannt, aber konstant modelliert.

Ein Vergleich alternativer Kontrollansätze zeigt, daß in diesem Modell der aktive Lernansatz den passiven Methoden, einschließlich dem sicherheitsäquivalenten Lösungsverfahren, nicht unbedingt überlegen ist; der rechentechnische Aufwand, der beim aktiven Kontrollverfahren notwendig ist, steht in keinem Verhältnis zum resultierenden Lerngewinn. Kendrick führt diese Tatsache teilweise auf die Modellierung der stochastischen Parameter (Annahme konstanter Koeffizienten) zurück. Die Kovarianzen in der Startperiode sind zu gering, so daß aktives Lernen keine sichtbaren Vorteile (Verbesserung der Parameterschätzungen) liefert. Bei Annahme zeitvarianter Parameter kann dagegen die approximative duale Kontrollmethode den passiven Ansätzen überlegen sein, da aufgrund größerer Kovarianzen zu Beginn des Planungszeitraumes die Möglichkeit zum verstärkten Lernen besteht; damit kann sich der anfängliche Informationsgewinn in späteren Perioden positiv auswirken. Die Länge des Planungszeitraumes spielt deswegen bei den aktiven Lernansätzen eine große Rolle.

Tse, Bar-Shalom und Meier (1973) und Tse (1974) kommen in ihren Untersuchungen zu dem Ergebnis, daß der duale Kontroll-

ansatz wesentlich bessere Resultate (in Termini der Kosten) liefert als die sicherheitsäquivalente Kontrolle. Die Berücksichtigung stochastischer Effekte ermöglicht hier im gewissen Sinne "zuverlässigere" Kontrollen bzw. Politikeinsätze.

5. Alternative adaptive Kontrollalgorithmen

In der Literatur werden neben den oben ausführlich diskutierten approximativen adaptiven Kontrollansätzen noch alternative Verfahren behandelt. Einen Überblick über adaptive Entscheidungsmodelle geben Kendrick (1976, 1981), Pekelman und Rausser (1978) und Rausser und Hochman (1979). Die einzelnen approximativen Kontrollalgorithmen basieren dabei jeweils auf speziellen Annahmen bzgl. des zugrundeliegenden ökonometrischen Modells, der zu minimierenden Zielfunktion und der unterstellten Unsicherheiten [siehe hierzu Aoki (1967), Saridis und Lobbia (1972), Wieslander und Wittenmark (1971), Murphy (1968), Gorman und Zaborszky (1968), Deshpande et al. (1972), Upadhyay (1975), Taylor (1973)].

Wegen der Komplexität der verschiedenen adaptiven Kontrollalgorithmen ist es analytisch äußerst schwierig, allgemeingültige Aussagen über die Güte alternativer Kontrollansätze zu machen. Nur mit sehr speziellen, einschränkenden Annahmen ist eine Beurteilung der unterschiedlichen Entscheidungsalgorithmen möglich, generell kann nicht entschieden werden, ob die duale Methode dem passiven bzw. dem sicherheitsäquivalenten Kontrollansatz überlegen ist.

Empirische Vergleiche alternativer stochastischer Entscheidungsansätze sind einfacher durchzuführen [vgl. Kendrick (1981, 1979), Bar-Shalom und Tse (1976), Chow (1975), Abel (1975), MacRae (1972), Noman (1976), Prescott (1971), Sarris und Athans (1973), Zellner (1971)].

Einschränkend ist jedoch hierzu zu sagen, daß in der Literatur die Vergleiche einzelner Kontrollmethoden nur mit wenigen Monte Carlo Simulationen (wegen Rechenkosten) und

meistens mit unterschiedlicher Datenbasis vorgenommen werden, so daß Aussagen über die Güte verschiedener stochastischer Kontrollalgorithmen jeweils nur problemspezifisch, d.h. anhand des vom speziellen Autor verwendeten konkreten Entscheidungsmodells, gemacht werden können. Da die Autoren jeweils von unterschiedlichen Voraussetzungen bzgl. des Entscheidungsproblems ausgehen, existiert keine eindeutige Rangfolge für die suboptimalen approximativen dualen Kontrollalgorithmen.
In der Literatur gibt es nur sehr wenige Untersuchungen, die alternative suboptimale aktive Lernansätze miteinander vergleichen. Bar-Shalom und Tse (1976) verwenden das "MacRae Problem", um die Güte bzw. Rangfolge der einzelnen adaptiven Kontrollalgorithmen beurteilen bzw. feststellen zu können. Dabei werden die optimalen Lösungen der ersten Periode sowie die optimalen Kosten jeweils für sechs verschiedene Algorithmen berechnet. Neben den approximativen Ansätzen von Tse, Bar-Shalom und Meier, Chow und MacRae werden auch die sicherheitsäquivalente, die "open-loop feedback" und die optimale Lösung (erhalten durch eine Vielzahl von Monte Carlo Läufen) zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit der alternativen Kontrollmethoden herangezogen.

Die Ergebnisse zahlreicher Monte Carlo Simulationen zeigen, daß kaum Aussagen über die Güte verschiedener Algorithmen und somit über die Berücksichtigung und Verarbeitung unterschiedlicher Unsicherheitsannahmen gemacht werden können. Bei den aktiven Lernansätzen ist keine Überlegenheit einer Methode zu erkennen, es kann lediglich eine Überlegenheit der aktiven Ansätze gegenüber dem sicherheitsäquivalenten Verfahren festgestellt werden. Gegenüber dem "open-loop feedback" Algorithmus ist kein eindeutiges Verhalten mehr erkennbar, d.h. beim vorliegenden Entscheidungsmodell besteht nur in einem sehr begrenzten Maße die Möglichkeit, bzgl. der Unsicherheiten durch Experimentieren zu lernen. Ein Grund für das relativ unbefriedigende Abschneiden der aktiven Lernalgorithmen kann in der geringen Länge des Optimierungszeitraumes bestehen.

Norman (1979) erweitert diese Untersuchung alternativer sub-optimaler Entscheidungsregeln um die aktiven Lernalgorithmen "erster Ordnung". Dabei zeigt sich, daß die "open-loop feedback" Regel in einigen Fällen durchaus bessere Resultate liefert als die dualen Methoden von Norman.

Wenn die Rechenzeiten bzw. die Rechenkosten zur Beurteilung alternativer Lernalgorithmen herangezogen werden, stellt die duale Methode von Norman, die den Zustandsvektor nicht um die stochastischen Parameter erweitert, das "beste" bzw. "effektivste" aktive adaptive Kontrollverfahren dar. Diese Tatsache ist besonders wichtig im Hinblick auf größere Entscheidungsmodelle.

Literaturverzeichnis

Abel, A.B. (1975), A Comparison of Three Control Algorithms to the Monetarist-Fiscalist Debate, Ann. Econ. Soc. Meas., 4 (2), 239-252.

Albert, A. und R.W. Sittler (1965), A Method of Computing Least Squares Estimators that Keep Up with Data, Siam. J. Control Ser. A3, 284-417.

Alspach, D.L. und H.W. Sorenson (1970), Approximation of Density Function by a Sum of Gaussian for Nonlinear Bayesian Estimation, Proceedings of Symposium on Nonlinear Estimation Theory and Its Application, San Diego, Calif.

Aoki, M. (1967), Optimization of Stochastic Systems, New York: Academic Press.

Athans, M. (1972), The Discrete Time Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem, Ann. Econ. Soc. Meas. 1 (4), 449-491.

Bar-Shalom, Y. und R. Sivan (1969),On the Optimal Control of Discrete-Time Linear Systems with Random Parameters, IEEE Trans. Autom. Control AC-14,3-8

Bar-Shalom, Y., Tse, E. und R.E. Larson (1974), Some Recent Advances in the Development of Closed-Loop Stochastic Control and Resource Allocation Algorithms, Proc. IFAC Symp. Adaptive Control, Budapest.

Bar-Shalom, Y. und E. Tse (1974), Dual Effect, Certainty Equivalence and Separation in Stochastic Control, IEEE Trans. Autom. Control, AC-19, 494-500.

Bar-Shalom, Y. und E. Tse (1975), Concepts and Methods in Stochastic Control, in C.T. Leondes (Hrsg.), Control and Dynamic Systems: Advances in Theory and Applications, New York.

Bar-Shalom, Y. und E. Tse (1976), Caution, Probing and the Value of Information in the Control of Uncertain Systems, Ann. Econ. Soc. Meas. 5, 323-338.

Bellman, R. (1961), Adaptive Control Process: A Guided Tour (Princeton University Press: Princeton, N.J.).

Bucy, R.S. (1965), Nonlinear Filtering Theory, IEEE Trans. Autom. Control, AC-10.

Bucy, R.S. und K.D. Sennes (1970), Realization of Optimum Discrete-Time Estimators, Proceedings of Symposium on Nonlinear Estimation Theory and Its Application, San Diego, Calif..

Chow, G.C. (1975), Analysis and Control of Dynamic Systems, New York.

Chow, G.C. (1976), An Approach to the Feedback Control of Nonlinear Econometric Systems, Ann. Econ. Soc. Meas. 5 (3), 297-310.

Chow, G.C. (1981), Econometric Analysis by Control Methods, New York.

Curry, R.E. (1969), A New Algorithm for Suboptimal Stochastic Control, IEEE Trans. Autom. Control, AC-14, 533-536.

Deshpande, J.G., Upadhyay, T.N. und D.G. Lainiotis (1972), Adaptive Control of Linear Stochastic Systems, Automatica 9, 107-115

Dreze, J. (1972), Econometrics and Decision Theory, Econometrica 40, 1-18.

Färber, U. (1981), Die Konstruktion adaptiver Regelmechanismen zur Vorbereitung wirtschaftspolitischer Entscheidungen, Frankfurt/Main.

Feldbaum, A.A. (1965), Optimal Control System, New York.

Gorman, D. und J. Zabordszky (1968), Stochastic Optimal Control of Continuous Time Systems with Unknown Gain, IEEE Trans. Autom. Control, AC-13, 630-638.

Jazwinski, A. (1970), Stochastic Processes and Filtering Theory, New York.

Kalman, R.E. (1960), A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, ASME J. Basic Eng. 82, 35-45.

Kendrick, D.A. (1976), Applications of Control Theory to Macroeconomics, Ann. Econ. Soc. Meas., 5 (2), 171-190.

Kendrick, D.A. (1979), Adaptive Control of Macroeconomic Models with Measurement Error, chap. 9 in Holly, Rustem and Zarrop.

Kendrick, D.A. (1981), Stochastic Control for Economic Models, New York.

Kendrick, D.A. und L. Taylor (1970), Numerical Solutions of Nonlinear Planning Models, Econometrica, 38 (3), 453-467).

Ku, R. und M. Athans (1973), On the Adaptive Control of Linear Systems Using the Open Loop Feedback Optimal Approach, IEEE Trans. Autom. Control, AC-18, 489-493.

MacRae, E.C. (1972), Linear Decision with Experimentation, Ann. Econ. Soc. Meas., 1, 437-447.

MacRae, E.C. (1975), An Adaptive Learning Role for Multiperiod Decision Problems, Econometrica, 43 (5-6), 893-906.

Murphy, W.J. (1968), Optimal Stochastic Control of Discrete Linear Systems with Unknown Gain, IEEE Trans. Autom. Control, AC-13, 338-344.

Norman, A.L. (1976), First Order Dual Control, Ann. Econ. Soc. Meas. 5, 311-322.

Norman, A.L. (1979), Dual Control of Perfect Observations, in J.N.L. Janssen, L.M. Pau und A. Straszak (Hrsg.), Models and Decision Making in National Economies, Amsterdam, 343-349.

Pekelman, D. und G.C. Rausser (1978), Adaptive Control: Survey of Methods and Applications, in A. Bensonssan, P.R. Kleindorfer, C.S. Tapiero (Hrsg.), Applied Optimal Control, Amsterdam, 89-120.

Pekelman, D. und E. Tse (1976), Experimentation and Control in Advertisement: An Adaptive Control Approach, University of Pennsylvania, Pa..

Prescott, E.C. (1971), Adaptive Decision Rules for Macroeconomic Planning , West. Econ. J., 9, 369-378.

Prescott, E.C. (1972), The Multi-Period Control Problem under Uncertainty, Econometrica, 40, 1043-1058.

Rausser, G. (1978), Active Learning, Control Theory, and Agricultural Policy, Amer. J. Agricultural Economics, 60 (3), 476-490.

Rausser, G. und J.W. Freebairn (1974), Approximate Adaptive Control Solutions to U.S. Beef Trade Policy, Ann. Econ. Soc. Meas. 3 (1), 177-203.

Rausser, G. und E. Hochman (1979), Dynamic Agricultural Systems: Economic Prediction and Control, New York.

Saridis, G.N. und R.N. Lobbia (1972), Parameter Identification and Control of Linear Discrete-Time Systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-17, 52-60.

Sarris, A.H. und M. Athans (1973), Optimal Adaptive Control Methods for Structurally Varying Systems, Cambridge, Mass., Working Paper.

Sorenson, H.W. (1966), Kalman Filtering Techniques, in C. Leondes (Hrsg.), Advances in Control Systems, New York, 219-292.

Taylor, J.B. (1973), A Criterion for Multiperiod Control in Economic Models with Unknown Parameters, Columbia University, Discussion Paper.

Theil, H. (1964), Optimal Decision Rules for Government and Industry, Amsterdam.

Tse, E. (1974), Adaptive Dual Control Methods, Ann. Econ. Soc. Meas. 3, 65-83.

Tse, E. und M. Athans (1972), Adaptive Stochastic Control for a Class of Linear Systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-17, 38-52.

Tse, E. und Y. Bar-Shalom (1973), An Actively Adaptive Control for Discrete-Time Systems with Random Parameters, IEEE Trans. Autom. Control, AC-18, 109-117.

Tse, E., Bar-Shalom, Y. und L. Meier (1973), Wide-Sense Adaptive Dual Control of Stochastic Nonlinear Systems, IEEE Trans. Autom. Control, AC-18, 98-108.

Upadhyay, T. (1975), Application of Adaptive Control to Economic Stabilization Policy, Int. J. Syst. Sci., 6 (10), 641-650.

Wieslander, J. und W. Wittenmark (1971), An Approach to Adaptive Control Using Real Time Identification, Automatica 7 (2), 211-217.

Zellner, A. (1971), An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics, New York.

Stabilisierungspolitik im Rahmen eines stochastischen Kontrollansatzes: eine empirische Analyse für die Bundesrepublik Deutschland

Wolfgang Franz
Theo Kempf
Horst Kräger

1. Einführung

Dieser Beitrag beschäftigt sich im Rahmen eines kontrolltheoretischen Ansatzes mit der Bedeutung wirtschaftspolitischer Entscheidungsregeln für die Stabilisierungspolitik. Konkret wird mit Hilfe eines kleinen ökonometrischen Modells der bekannte Zielkonflikt zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit analysiert, wobei im Gegensatz zur Simulation eines ökonometrischen Modells die kontrolltheoretische Methode die Vorgabe wirtschaftspolitisch gewünschter Zeitpfade der endogenen Variablen sowie der Instrumentvariablen ermöglicht. Somit können in Verbindung mit einer Zielfunktion die Effekte alternativer Stabilisierungspolitiken auf die genannten Variablen evaluiert werden, wobei sich die einzelnen Strategien im wesentlichen durch die Höhe der Gewichtung, mit denen die Zielvariablen an den vorgegebenen Optimalpfad angepaßt werden, voneinander unterscheiden.

Die Requisiten für eine informierte Diskussion alternativer wirtschaftspolitischer Maßnahmen sind zunächst ein ökonometrisches Modell der zu analysierenden Ökonomie, damit überhaupt gezeigt werden kann, ob und inwieweit und mit welcher Wahrscheinlichkeit eine alternative Politikaktion zu ver-

schiedenen und präferableren Zielerfüllungsgraden führt.[1] Ein solches Modell wird im übernächsten Abschnitt 3 vorgestellt, während das folgende Kapitel 2 sich mit der grundsätzlichen Kritik auseinandersetzt, die an Politiksimulationen mit Hilfe ökonometrischer Modelle (mit oder ohne kontrolltheoretischem Ansatz) insbesondere von den Verfechtern rationaler Erwartungen geübt wurde.

Weitere Elemente für eine Politikevaluation sind sowohl ein Ziel- respektive Kostenfunktional für die relevanten ökonomischen Variablen sowie eine Berücksichtigung von Unsicherheit, d.h. eine Offenlegung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Nutzens bzw. Verlustes, der aufgrund der Politikaktion entsteht. Zusammen mit einigen Hinweisen auf die methodische Vorgehensweise wird auf diese Probleme im Abschnitt 4 eingegangen. Empirische Resultate der Berechnung eines "trade-off's" zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation werden in Abschnitt 5 vorgestellt.

2. Zur Relevanz von Politiksimulationen mit ökonometrischen Modellen

Sowohl ökonometrische Modelle als auch der kontrolltheoretische Ansatz sind in letzter Zeit als Mittel zur Simulation wirtschaftspolitischer Maßnahmen diskreditiert worden: "... modern macroeconomic models are of no value in guiding policy" [2] und "... for the aggregate demand management problem, it is shown that the application of optimal control theory is equally absurd, at least if expectations are rational.[3] Das Argument lautet, daß die

1) Siehe Chow (1981, S. 123).
2) Siehe Lucas und Sargent (1978, S. 50).
3) Siehe Kydland und Prescott (1977, S. 475).

gegenwärtigen Entscheidungen der handelnden Wirtschaftssubjekte zum Teil auch von ihren Erwartungen bezüglich der zukünftigen wirtschaftspolitischen Aktionen beeinflußt werden. Die derzeitige Anwendung einer bestimmten wirtschaftspolitischen Maßnahme - z.B. expansive Fiskalpolitik anstatt Konsolidierung des Staatshaushalts - läßt die Wirtschaftssubjekte mit größerer Wahrscheinlichkeit z. B. künftige Steuererhöhungen erwarten, mit der Folge, daß, soweit möglich, zukünftig geplanter Konsum (im Fall einer Mehrwertsteuererhöhung) respektive zukünftig geplantes Arbeitsangebot (im Fall einer Einkommensteuererhöhung) zeitlich vorgezogen werden.

In einer etwas präziseren Argumentation mögen y_t den zum Zeitpunkt t herrschenden Zustand der Ökonomie (unter Einbeziehung ihrer Historie) und x_t einen Vektor wirtschaftspolitischer Maßnahmen bezeichnen, die im Zeitpunkt t ergriffen werden.[1] In jedem Zeitpunkt t existiere eine Funktion g_t, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von y_{t+1} in Abhängigkeit von y_t und x_t bestimmt, d.h. den Zustand der Ökonomie im Zeitpunkt $t+1$. Im Rahmen des kontrolltheoretischen Ansatzes ist x_t der Vektor der Werte für die Kontrollvariablen und g_t eine bei der Optimierung der wirtschaftspolitischen Strategien gegebene Funktion, die durch die Verhaltensgleichungen des der Untersuchung zugrundeliegenden ökonometrischen Modells beschrieben wird.

Genau hier setzt die eingangs genannte Kritik ein. Bei gegebenen y_t und x_t können sich die Wirtschaftssubjekte ganz unterschiedlich verhalten, je nachdem welche wirtschaftspolitische Aktion x_{t+s} $(s>0)$ sie für die Zukunft erwarten. Es gibt mithin auch keine Funktion g_t, d.h. kein ökonometrisches Modell, das in der Lage wäre, y_{t+1} allein aufgrund von y_t und x_t (d. h. der Variablen eines ökono-

---

1) Zu den folgenden Ausführungen siehe auch Sims (1982).

metrischen Modells) zu bestimmen, sondern es fehlt immer die Information darüber, welche Erwartungen die Wirtschaftssubjekte über x_{t+s} haben. M.a.W. die Strukturgleichungen des ökonometrischen Modells sind nicht invariant gegenüber Veränderungen der Zukunftserwartungen der Wirtschaftssubjekte. Hinzu kommt, daß beim dynamischen Ansatz der Kontrolltheorie eine optimale Sequenz von y_{t+s} und x_{t+s} (bei gegebenen y_t und x_t) ermittelt wird. Insoweit die Wirtschaftssubjekte x_{t+s} kennen (weil sie z. B. rationale Erwartungen haben), ändern sich ihre Verhaltensweisen, und die berechneten Simulationsergebenisse sind kaum noch aussagekräftig. Wenig überraschend ist daher die wirtschaftspolitische Folgerung, die von den Protagonisten rationaler Erwartungen gezogen wird: da die Wirtschaftssubjekte aufgrund der Revision ihrer Erwartungen bei neu verkündeten wirtschaftspolitischen Maßnahmen nicht in der gewünschten Weise reagieren, sind feste Regeln optimal, diskretionäre Maßmahmen hingegen suboptimal.[1)]

Die vorgetragene Kritik beruht nicht notwendigerweise auf der Gültigkeit rationaler Erwartungen und ist daher nicht damit zu entkräften, daß rationale Erwartungen in ihrer strengen Form nicht rational sind, weil sie die Kosten der Informationsbeschaffung und der ständigen Aktualisierung des ökonometrischen Modells vernachlässigen [Feige und Pearce (1976), B. Friedman (1979)]. Für die Argumentation ist es ausreichend zu unterstellen, daß "agents have some knowledge of how policymakers' decision will change as a result of changing economic conditions"[2)].

---

1) Für einen formalen Nachweis siehe Kydland und Prescott (1977).

2) Siehe Kydland und Prescott (1977, S. 474).

Ein Plädoyer für eine Relevanz von Politiksimulationen kann mithin die Gültigkeit der vorgebrachten Argumente nicht prinzipiell in Abrede stellen, sondern ihre Bedeutung angesichts der Realität wirtschaftspolitischer Entscheidungen zu relativieren versuchen [Sims (1982)]. Wirtschaftspolitik wird auf verschiedenen Ebenen der Gebietskörperschaften betrieben, und zwar bekanntlich nicht immer gleichgerichtet und - angesichts überlappender Wahlperioden - nicht immer langfristig angelegt, geschweige denn durchgeführt. Oft werden gesetzlich verankerte wirtschaftspolitische Maßnahmen binnen kurzer Frist wieder rückgängig gemacht respektive erheblich modifiziert.[1)] Schließlich scheitern oder verzögern sich wirtschaftspolitische Maßnahmen aufgrund des Einspruchs von Interessengruppen.

Es ist daher nicht unplausibel anzunehmen, daß die Wirtschaftssubjekte wirtschaftspolitischen Maßnahmen - selbst wenn sie hinreichend publik gemacht werden - nur in beschränktem Umfang vertrauen. Angesichts der aufgeführten Imponderabilien wirtschaftspolitischer Entscheidungsprozesse werden die Wirtschaftssubjekte ihre Erwartungen bezüglich künftiger Maßnahmen nur begrenzt revidieren, und zwar umso weniger, je weiter diese zeitlich entfernt sind.[2)]

---

1) Beispiele aus der jüngeren Wirtschaftsgeschichte sind die Diskussionen um beschäftigungspolitische Maßnahmen während der SPD/FDP-Koalition bzw. um die Rückzahlbarkeit der Investitionshilfeabgabe in der CDU/CSU/FDP-Koalition.
2) Abgesehen davon wirkt eine Abdiskontierung der zukünftigen Maßnahmen in dieselbe Richtung.

Die Stärke der Reaktionen der Wirtschaftssubjekte hängt überdies von dem jeweils untersuchten Markt ab: Finanzmärkte werden eher und heftiger auch auf kurzfristig konzipierte bzw. nur angekündigte Maßnahmen reagieren, im Gegensatz etwa zum Lohn- und Preisbildungsprozess, der im Mittelpunkt der in diesem Beitrag durchgeführten Analyse steht. Weiterhin ändern sich nur einige Parameter eines Makromodells aufgrund einer Politikänderung: einerseits gibt es eine Reihe von Verhaltensgleichungen, in denen Erwartungen über künftige Politikreaktionen irrelevant sind, andererseits beeinflussen veränderte Erwartungen nicht notwendigerweise die Parameter des Modells, sondern z.T. nur den Wert der erwarteten Variablen.

3. Beschreibung des ökonometrischen Modells

Das der Untersuchung zugrundeliegende ökonometrische Modell ist ein Partialmodell des Arbeitsmarktes, erweitert um eine Preisbestimmungsgleichung. Die Verbindung zum Gütermarkt der Volkswirtschaft erfolgt über den Auslastungsgrad des Produktionspotentials. Direkte Effekte des Geldmarktes auf das Arbeitsmarktgeschehen (z. B. über eine Faktorpreisrelation von Arbeit und Kapital in der Arbeitsnachfragefunktion) bleiben unberücksichtigt. Diese Einschränkungen und der hohe Aggregationsgrad des Modells, das keine Aussagen beispielsweise über intersektorale Verschiebungen in der Arbeitsnachfrage oder geschlechtsspezifische Änderungen des Arbeitsangebots enthält, legen eine vorsichtige Interpretation der Ergebnisse nahe und lassen den experimentellen Charakter der Studie deutlich hervortreten.

Um die Übersicht über das Modell zu erleichtern, enthält Tabelle 1 eine Auflistung der endogenen und exogenen Variablen des Modells mit den dazugehörigen Symbolen.

Tabelle 1: Modellvariablen

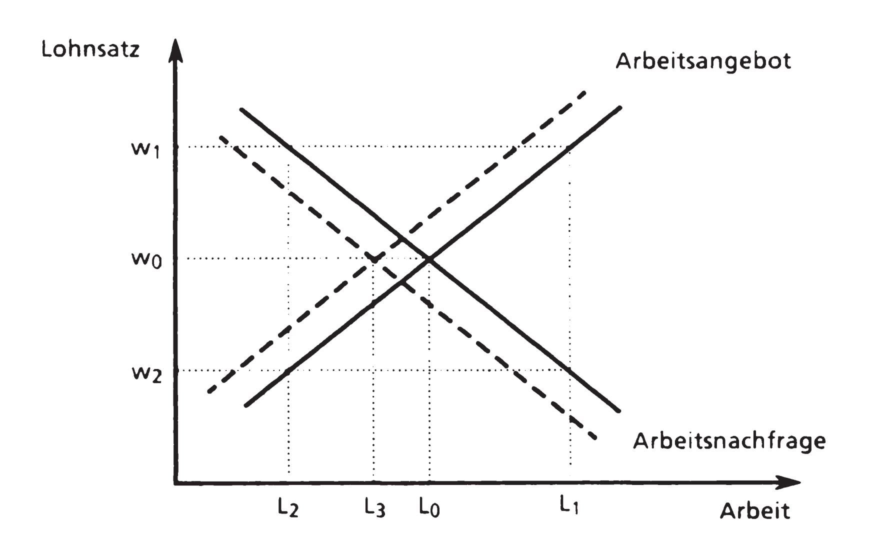
Symbol	Bezeichnung der Variablen	Dimension
	Endogene Variable:	
ET	Erwerbstätige insgesamt	in Tausend
ET^{A}	ausländische Erwerbstätige	in Tausend
ET^{D}	deutsche Erwerbstätige	in Tausend
IN^{EG}	Zuwanderung italienischer Erwerbspersonen	in Tausend
IN^{NEG}	Zuwanderung ausländischer Erwerbspersonen aus Nicht-EG-Ländern	in Tausend
L	Arbeitsangebot insgesamt in Personen	in Tausend
L^{EG}	Arbeitsangebot aus EG-Ländern in Personen	in Tausend
L^{D}	Arbeitsangebot von Deutschen in Personen	in Tausend
L^{NEG}	Arbeitsangebot aus Nicht-EG-Ländern in Personen	in Tausend
LF	Erwerbsquote der deutschen Erwerbsbevölkerung (ΔLF = 1. Differenz von LF)	in v. H.
N	Nachfrage nach Arbeit insgesamt in Personen	in Tausend
N^{A}	Nachfrage nach ausländischen Arbeitskräften in Personen	in Tausend
N^{D}	Nachfrage nach deutschen Arbeitskräften in Personen	in Tausend
OUT^{EG}	Rückwanderung italienischer Erwerbspersonen	in Tausend
OUT^{NEG}	Rückwanderung von Erwerbspersonen aus Nicht-EG-Ländern	in Tausend
PC	Preisindex für Konsumgüter	1970 = 100
RD	Reallohndifferenz BRD-Italien	in Kaufkraft-standards
U	Arbeitslose insgesamt in Personen	in Tausend

Symbol	Bezeichnung der Variablen	Dimension
U^A	ausländische Arbeitslose	in Tausend
U^D	deutsche Arbeitslose	in Tausend
UR	Arbeitslosenquote insgesamt	in v. H.
UR^D	Arbeitslosenquote von Deutschen	in v. H.
UR^A	Arbeitslosenquote von Ausländern	in v. H.
V	Offene Stellen	in Tausend
WB	Bruttostundenlohnsatz nominal	in DM
WBS	Bruttostundenlohnkosten nominal	in DM
WNR	Nettostundenlohnsatz real	in DM
WPC	Inflationsrate (Wachstumsrate von PC)	in v. H.
WWB	Wachstumsrate WB	in v. H.
	Exogene Variable:	
ALU	Arbeitslosenunterstützungssatz (in v.H. des Nettolohnes) jeweils für BRD und Italien	in v. H.
AUS	Auslastungsgrad des Produktionspotentials	in v. H.
EP65	Erwerbspersonen über 65 Jahre	in Tausend
GPOP	Bevölkerung zwischen 15 und 65 Jahre insgesamt	in Tausend
HH	Index zur Entwicklung der Privathaushalte	1970 = 1
PCT	gewichteter Preisindex des privaten Verbrauchs BRD/Italien	1970 = 100

Symbol	Bezeichnung der Variablen	Dimension
PBWU	Preisindex Bruttowertschöpfung der Unternehmen	1970 = 100
PMG	Preisindex importierter Vorprodukte	1970 = 100
Q_1-Q_4	Saisondummies; QT bzw. QTT: zeitabhängige Saisonkomponenten	
SSTO	Dummy für Anwerbestopp: ab 1973 IV = 1; 0 sonst	
T	Zeittrend, 1962 I = 1	
TR	Einkommensanteil, der von Gastarbeitern in ihre Heimatländer transferiert wird	in v. H.
UR^{ITA}	Arbeitslosenquote in Italien	in v. H.
UR^{NEG}	gewichtete Arbeitslosenquote Griechenland, Jugoslawien, Türkei	in v. H.
VHHR	Haushaltsvermögen, real	in Mrd. DM
WAPR	Wachstumsrate Arbeitsproduktivität	in v. H.
WAPRT	Trend von WAPR	in v. H.
WB^{ITA}	Bruttostundenlohnsatz Italien	in Lire
WPMG	Inflationsrate importierter Vorprodukte	in v. H.
s	Abgabesatz zur Sozialversicherung, Arbeitgeber (jeweils für BRD und Italien)	in v. H.
u	Steuersatz plus Sozialversicherungsabgabesatz, Arbeitnehmer (jeweils für BRD und Italien)	in v. H.

Insgesamt enthält das Modell 29 endogene und 20 exogene Variable.[1] Die Schätzung erfolgte mit der zweistufigen Methode der kleinsten Quadrate. Als statistische Prüfmaße werden das Quadrat des um die Freiheitsgrade bereinigten multiplen OLS-Korrelationskoeffizienten[2], die t-Werte (in Klammern unter den Regressionskoeffizienten) und die Durbin-Watson-Statistik DW respektive Durbins h (wenn die zu erklärende Variable zeitlich verzögert als erklärende Variable in der Gleichung auftritt) angegeben. Die Grundzeitperiode des Modells sind Quartalswerte, der Beobachtungszeitraum erstreckt sich von 1962/I bis 1979/IV, insgesamt liegen mithin 72 Beobachtungen vor.

<u>Schaubild 1:</u> Struktur des Arbeitsmarktmodells



1)Letztere ohne Saisonkomponenten in unterschiedlicher Definition.
2)Bei homogenen Regressionsgleichungen ist eine Berechnung von R^2 indessen nicht sinnvoll.

Schaubild 1 gibt eine stilisierte Darstellung der Struktur und Funktionsweise des Modells. Gleichgewicht auf dem Arbeitsmarkt herrscht beim Lohnsatz w_0. Der Lohnsatz ist im Modell indessen nicht voll flexibel, sondern wird über eine Verhaltensgleichung bestimmt, in der die Arbeitsmarktsituation nur eine von mehreren erklärenden Variablen darstellt. Folglich gibt es Situationen, in denen beim Lohnsatz w_1 die Arbeitsanbieter in Höhe L_2 rationiert sind, d.h. es herrscht Arbeitslosigkeit L_1-L_2, während beim Lohnsatz w_2 die Arbeitsnachfrage bei L_2 rationiert ist und offene Stellen in Höhe von L_1-L_2 vorhanden sind.[1] Friktionell und/oder strukturell bedingte Ungleichgewichte (z. B. aufgrund von Suchprozessen und Inkongruenz von angebotenen und nachgefragten Berufen) führen dazu, daß beim Gleichgewichtslohn w_0 einer Zahl von Arbeitslosen in Höhe von L_0-L_3 eine gleich große Menge von offenen Stellen gegenübersteht, während bei der mit w_1 verbundenen Arbeitslosigkeit L_1-L_2 auch noch offene Stellen (wieder in Höhe von L_0-L_3) vorhanden sind.

Meßzahlen für die nicht beobachtete Variable "Arbeitsangebot" sind die Erwerbspersonen als Summe von Erwerbstätigen und der beim Arbeitsamt registrierten Arbeitslosen, während die "Arbeitsnachfrage" als Summe ebenfalls der Erwerbstätigen und der offenen Stellen - ungeachtet ihrer Meßproblematik - statistisch erfaßt wird. Daraus folgt, daß bei einer Schätzung von Arbeitsangebots- bzw. -nachfragefunktionen entweder zusätzlich nur noch die Arbeitslosen oder nur die offenen Stellen durch eine Verhaltensgleichung erfaßt werden müssen. Das vorliegende Modell wählt die erstgenannte Möglichkeit, um die Arbeitslosigkeit aufgrund ihrer wirtschaftspolitischen Relevanz

1) Die Übereinstimmung der Strecken L_1-L_2 dient nur der Übersichtlichkeit der Graphik.

möglichst exakt zu modellieren, während die offenen Stellen als Residualgröße durch das Modell bestimmt werden, mit dem bekannten Nachteil, daß alle Schätzfehler in diese Größe eingehen.
Ein Spezifikum des deutschen Arbeitsmarktes ist die hohe internationale Mobilität des Faktors Arbeit, die die in der Bundesrepublik Deutschland beschäftigten Ausländer von rd. 280 000 im Jahre 1960 auf etwa 2.6 Mio. im Jahre 1973 ansteigen ließ. Der darauffolgende Rückgang auf etwa 1.9 Mio. im Jahre 1979 ist teilweise auf den Anwerbestopp zurückzuführen. Damit wird bereits deutlich, daß die Höhe der Ausländerbeschäftigung nicht allein und direkt durch ökonomische Variablen bestimmt wird, sondern daß sie als eine arbeitsmarktpolitische Instrumentvariable angesehen werden muß. Dies gilt indessen nur einschränkend, da für Erwerbspersonen aus einem Mitgliedsland der EG im allgemeinen die Freizügigkeit der Arbeitsplatzwahl gilt. Neben der durch den Anwerbestopp ceteris paribus bewirkten Plafondierung der Ausländerbeschäftigung muß ebenfalls die Remigrationspolitik berücksichtigt werden, die sich aufgrund administrativer Maßnahmen durch beispielsweise einer Nichtverlängerung der Arbeits- respektive Aufenthaltserlaubnis ergibt. Allerdings hat die Remigrationspolitik insbesondere in der letzten Dekade stark an Bedeutung eingebüßt, da für die Ausländer vorteilhafte Regelungen bezüglich einer verlängerten Aufenthaltserlaubnis erlassen wurden und darüber hinaus Ausländer, die (temporär) in ihre Heimatländer zurückgekehrt wären, dies unterlassen haben, da der Anwerbestopp ihre Rückkehr nach Deutschland verhindert.[1] Insoweit ist es auch nicht mehr gerechtfertigt, der Ausländerbeschäftigung eine Pufferfunktion zuzuweisen.

---

1) Siehe dazu Franz (1981).

Im folgenden werden die einzelnen Elemente des Modells kurz vorgestellt. Mit wenigen Ausnahmen stellen die Verhaltensgleichungen Standardversionen dar, so daß sich eine ausführliche Kommentierung erübrigt.

Es erleichtert die Darstellung des Modells, wenn zunächst die Angebots- und dann die Nachfrageseite des Arbeitsmarktes betrachtet wird. Das gesamte Arbeitsangebot (in Personen) setzt sich aus dem Arbeitsangebot der Deutschen (L^D), der EG-Ausländer (L^{EG}) und der Nicht-EG-Ausländer (L^{NEG}) zusammen, wobei zu L^{EG} die Italiener rechnen, da die nicht-italienischen EG-Erwerbspersonen quantitativ vernachlässigt und zu L^{NEG} gezählt werden können. Im übrigen bilden die türkischen Erwerbspersonen den Hauptbestandteil von L^{NEG}.

(1) $$L_t = L_t^D + L_t^{EG} + L_t^{NEG}$$

Um mit L^D zu beginnen, wird im Modell eine Verhaltensgleichung für die Erwerbsquote *LF* der Deutschen im Alter zwischen 15 und 65 Jahren geschätzt (als erste Differenz). Die Erwerbsquote ist bereinigt um Änderungen in der Bevölkerung sowie deren Geschlechts- und Altersstruktur (*GPOP*) und der Haushaltsgröße (*HH*).[1]

(2) $$L_t^D = LF_t \cdot HH_t \cdot GPOP_t + EP65_t$$

(3) $$\Delta LF_t = \underset{(4.2)}{-0.0142}\,\Delta WNR_t \underset{(9.1)}{-0.0047}\,\Delta VHHR_{t-1} \underset{(3.0)}{-0.0047}\,\Delta UR_{t-1}$$
$$\underset{(3.9)}{-0.0051}\,(Q1\text{-}Q4) \underset{(7.1)}{+0.0034}\,(Q2\text{-}Q4) \underset{(0.8)}{-0.0008}\,(Q3\text{-}Q4)$$
$$DW = 1.9442$$

1) Zur Vorgehensweise dieser Korrektur siehe Lucas und Rapping (1970, S. 279 f.). *LF* ist demnach definiert als $LF = (L^D - EP65)/(HH \cdot GPOP)$.

Die Interpretation dieser Arbeitsangebotsfunktion ist hinlänglich bekannt: das negative Vorzeichen des Nettoreallohns (*WNR*)[1] zeigt, daß der Einkommens- den Substitutionseffekt dominiert; aufgrund des Einkommenseffektes muß natürlich das reale Haushaltsvermögen (*VHHR*) ebenfalls einen negativen Einfluß auf das Arbeitsangebot haben. Schließlich erweist sich aufgrund des negativen Vorzeichens der Arbeitslosenquote (*UR*), daß der "discouraged worker"-Effekt höher ist als der "additional worker"-Effekt.

Definitorisch ergibt sich die Veränderung des Arbeitsangebots der Ausländer aufgrund von Zuwanderungen (*IN*) und Abwanderungen (*OUT*):

(4) $$L_t^{EG} = L^{EG}_{t-1} + IN_t^{EG} - OUT_t^{EG}$$

(5) $$L_t^{NEG} = L^{NEG}_{t-1} + IN_t^{NEG} - OUT_t^{NEG}$$

Die Wanderungsströme der EG-Ausländer können mit den üblichen Migrationsmodellen erklärt werden.[2] Neben der Reallohndifferenz gemessen in Kaufkraftstandards zwischen Deutschland und Italien (*RD*) und der Nachfrage nach Arbeitskräften in Deutschland [3] - repräsentiert durch den Kapazitätsauslastungsgrad (*AUS*) - gehört auch der Bestand an italienischen Erwerbspersonen der Vorperiode zu den erklärenden Variablen. Bei den Zuwanderungen IN_t^{EG} reflektiert diese Variable die Überlegung, daß in Italien nur ein bestimmtes Reservoir an "wanderungswilligen" Personen

---

1) Definiert als $WNR = WB(1-u)/PC$, wobei *WB* der Bruttonominallohnsatz, *PC* der Preisindex des privaten Verbrauchs und u der Abgabesatz der Arbeitnehmer sind.
2) Siehe zum Folgenden auch Franz (1981), Franz und Kempf (1983).
3) Die Arbeitslosenquote in Italien erwies sich bei der zweistufigen Schätzung als insignifikant.

vorhanden ist, das mit höherem $L^{EG}{}_{t-1}$ in größerem Umfang ausgeschöpft ist, so daß IN_t^{EG} kleiner wird.

(6)
$$IN_t^{EG} = -84.0060 + 84.2125\,RD_t + 1.2593\,AUS_{t-1}$$
$$\quad\quad (4.9) \quad\quad (8.5) \quad\quad (6.1)$$
$$-0.1145\,L^{EG}{}_{t-1} + 1.8531\,Q1T_t + 2.0151\,Q2T_t$$
$$\quad (5.4) \quad\quad (8.1) \quad\quad (13.7)$$
$$+1.3246\,Q3T_t + 0.3336\,Q4T_t$$
$$\quad (8.6) \quad\quad (1.7)$$
$$\bar{R}^2 = 0.8520$$
$$DW = 1.8424$$

$$\text{mit } QIT = \begin{cases} QIT & \text{für } 1962\,\text{I} - 1966\,\text{II} \\ QI & \text{für } 1966\,\text{III} - 1979\,\text{IV} \end{cases}, \quad I = 1,\ldots,4$$

(7)
$$OUT_t^{EG} = 48.4961 - 78.5748\,RD_t + 0.1788\,L^{EG}{}_{t-1} - 1.0044\,T$$
$$\quad (2.9) \quad\quad (3.8) \quad\quad (5.2) \quad\quad (6.3)$$
$$-3.6130\,Q1TT - 4.7014\,Q2TT - 2.5315\,Q3TT$$
$$\quad (2.6) \quad\quad (3.6) \quad\quad (1.9)$$
$$+5.5867\,Q4TT$$
$$\quad (3.8)$$
$$\bar{R}^2 = 0.8252$$
$$DW = 1.7224$$

$$\text{mit } QITT = [(QI \cdot T) \cdot 100], \quad I = 1,\ldots,4$$

(8)
$$RD = \left\{ \frac{(1-u)WB}{PCT} [(1-UR) + UR \cdot ALU] \right\}^{BRD} - \left\{ \frac{(1-u)WB}{PC} [(1-UR) + UR \cdot ALU] \right\}^{Italien}$$

Die zeitabhängigen Saisonvariablen sollen die im Zeitablauf geringer werdende saisonale Bewegung in den Wanderungsströmen erfassen, während der Zeittrend in der Verhaltensgleichung für die Abwanderung die zunehmende Ten-

denz zum Verbleib in der Bundesrepublik Deutschland widerspiegeln soll.

Die Reallohndifferenz setzt sich aus den für die Bundesrepublik respektive Italien relevanten Einkommensgrößen zusammen. Diese Komponenten sind die gewichteten Summen aus Nettoreallohn und Arbeitslosenunterstützung, wobei die Arbeitslosenquote als Gewicht fungiert, um die Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Einkommenserzielung zu approximieren. Darüberhinaus unterscheiden sich die Einkommenskomponenten durch ihre Deflationierung: für das in Italien (von den migrationswilligen Italienern) zu erzielende Einkommen dient das italienische Konsumgüterpreisniveau ($PC^{Italien}$) als Deflator, während für das in der Bundesrepublik zu erwartende Einkommen der deutsche Preisindex des privaten Verbrauchs (PC^{BRD}) nur insoweit relevant ist, als dieses Einkommen nicht nach Italien transferiert und dort konsumiert wird. Vereinfachend und aufgrund fehlender Zeitreihen haben wir diesen Anteil mit Hilfe der Überweisungsquote der Gastarbeitereinkommen in ihre Heimatländer (TR) berechnet.

Während das Arbeitsangebot von Personen aus EG-Staaten keinen direkten staatlichen Regelungen unterworfen ist, trifft dies für Arbeitskräfte aus Nicht-EG-Staaten nicht zu. Dies gilt insbesondere für den Ende 1973 verfügten und noch heute (d. h. Mitte 1984) gültigen Anwerbestopp, der jedoch insoweit nicht vollständig ist, als Familienangehörige von in der Bundesrepublik lebenden Gastarbeitern weiterhin einwandern und Arbeit anbieten können. Sowohl für die Zeitperiode des Anwerbestopps (ab 1973IV) als auch für die davorliegende Zeitperiode eines freieren Arbeitsmarktzutritts auch für Nicht-EG-Angehörige haben wir staatliche Reaktionsfunktionen geschätzt. Dabei wurde unterstellt, daß der Staat in der Periode 1962I-1973III den Nachfrageüberschuß nach Arbeit in Deutschland durch Ein-

wanderung von Erwerbspersonen aus Nicht-EG-Staaten verringert hat:

(9) $$IN^{NEG} = a_0 + a_1 AUS + a_2 UR^{NEG} \quad \text{für } 1962\,I \;-\; 1973\,III.$$

Der Kapazitätsauslastungsgrad soll dabei den Nachfragesog, die Nicht-EG-Arbeitslosenquote[1)] den Angebotsdruck repräsentieren. Für die Zeit des Anwerbestopps ist die Familienzusammenführung - verstärkt aufgrund der Arbeitsmarktbedingungen in den Nicht-EG-Staaten - bestimmend für die Zuwanderung:

(9a) $$IN^{NEG} = a_0 + a_2 UR^{NEG} + a_3 L^{NEG}_{t-1} \quad \text{für } 1973\,IV \;-\; 1979\,IV$$

Dem mit der Abwicklung der Zuwanderung in die Bundesrepublik einhergehenden Zeitbedarf haben wir - vereinfachend für die gesamte Zeitperiode - mit einem Anpassungsmodell des Typs

(9b) $$IN_t^{NEG} - IN^{NEG}_{t-1} = \lambda \, [IN_t^{NEG(*)} - IN^{NEG}_{t-1}]$$

Rechnung getragen $IN^{NEG(*)}$ bezeichnet die gemäß (9) und (9a) gewünschte Zuwanderung, so daß sich schließlich folgende Schätzgleichung ergibt:

---

1)Gewichtete Summe aus den Arbeitslosenquoten Griechenlands, Jugoslawiens und der Türkei.

(10)
$$IN_t^{NEG} = -208.3890 + 1.8949\,AUS_t\,(1\text{-}SSTO)$$
$$(4.7) \qquad (4.4)$$
$$+8.8116\,UR_t^{NEG} + 0.0703\,L^{NEG}{}_{t-1}\,(1\text{-}SSTO)$$
$$(5.0) \qquad (3.7)$$
$$+0.6983\,IN^{NEG}{}_{t-1} + 5.4124\,Q1 + 25.5669\,Q2$$
$$(12.6) \qquad (1.3) \qquad (7.7)$$
$$+30.0064\,Q3$$
$$(8.4)$$

$$\bar{R}^2 = 0.9215$$
$$DW = 1.8976$$
$$h = 0.4923$$

$$\text{mit } SSTO = \begin{cases} 1 & \text{für } 1973\text{IV} - 1979\text{IV} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bei der modellmäßigen Erfassung der Remigration der Nicht-EG-Arbeitskräfte gehen wir davon aus, daß diese zum überwiegenden Teil nicht dauerhaft in der Bundesrepublik bleiben wollen. Der Zeitpunkt der Rückwanderung wird durch die Arbeitsmarktsituation in der Bundesrepublik und in den Heimatländern und dem vorhandenen Bestand an Nicht-EG-Erwerbspersonen in der Bundesrepublik maßgeblich beeinflußt. Zusätzlich wird in der Schätzgleichung der bereits erwähnte negative Effekt des Anwerbestopps auf die Remigration untersucht. Im einzelnen ergibt sich aus einer Spezifikation der Gleichung für die Abwanderung des Typs

(11)
$$OUT_t^{NEG} = b_0 - b_1 UR_t^{NEG} + b_2 UR_t + (b_3 + b_4 \cdot SSTO) \cdot L^{NEG}{}_{t-1}$$

für eine freiwillige und arbeitsmarktinduzierte Remigration (d. h. für $SSTO = 0$) der Ausdruck: $- b_1 UR_t^{NEG} + b_2 UR_t + b_3 L^{NEG}{}_{t-1}$, während die Wirkung des Anwerbestopps auf die Remigration durch $b_4 L^{NEG}{}_{t-1}$ beschrieben wird. Das Vorzeichen des Koeffizienten b_4 ist unbestimmt: es hängt davon ab, inwieweit eine erfolgreiche Remigrationspolitik (d. h. $b_4 > 0$)kompensiert wird durch ein zeitliches Hinausschieben

einer (temporären) freiwilligen Remigration anderer Nicht-EG-Gastarbeiter (d. h. $b_4<0$), denen aufgrund eben dieses Anwerbestopps eine geplante Rückkehr nach Deutschland verwehrt wird. Unter Berücksichtigung einer zeitlichen Anpassungsverzögerung ergab die Schätzung von (11):

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad OUT_t^{NEG} = {} & \underset{(4.0)}{60.9249} - \underset{(2.5)}{6.9844}\, UR^{NEG}_{t-1} + \underset{(2.3)}{10.3559}\, UR_t \\
& + (\underset{(3.5)}{0.0226} - \underset{(2.9)}{0.0011}\, SSTO)\, L^{NEG}_{t-1} \\
& + \underset{(2.3)}{0.2509}\, OUT^{NEG}_{t-1} \\
& - \underset{(3.8)}{27.9297}\, Q1 - \underset{(1.6)}{11.3811}\, Q2 - \underset{(1.0)}{4.5687}\, Q3 \\
& \bar{R}^2 = 0.5100 \\
& DW = 2.0061 \\
& h = -0.0675
\end{aligned}
$$

Es ist erkennbar, daß die Auswanderung wegen $b_4<0$ bei einem Anwerbestopp ceteris paribus abnimmt, so daß die Wirksamkeit dieser Art der staatlichen Regulierung der Einwanderung durch eine reduzierte Auswanderung zum Teil unterlaufen wird.

Die gesamte Nachfrage nach Arbeit N_t unterteilt sich in die Nachfrage nach deutschen und nach ausländischen Arbeitskräften (N_t^D bzw. N_t^A).[1] Die Arbeitsnachfrage ihrerseits besteht aus realisierter Arbeitsnachfrage - den Erwerbstätigen (ET) - und den offenen Stellen (V) als der (noch) nicht realisierten Arbeitsnachfrage.

---

1) Auf eine Definition der Arbeitsnachfrage in Arbeitsstunden insgesamt und eine separate Spezifikation der je Erwerbstätigen geleisteten Arbeitstunden (pro Zeiteinheit) wird aus Vereinfachungsgründen abgesehen. Siehe dazu Franz (1978a).

(13) $$N_t = N_t^D + N_t^A$$

(14) $$N_t = ET_t + V_t$$

Zeitreihen über offene Stellen für Deutsche respektive Ausländer sind nicht erhältlich. Da eine offene Stelle in der Regel nur dann mit einem Nicht-EG-Ausländer besetzt werden kann, wenn kein deutscher Bewerber zur Verfügung steht, haben wir die offenen Stellen vereinfachend nur als nicht realisierte Arbeitsnachfrage für deutsche Arbeitskräfte behandelt.

(15) $$N_t^D = ET_t^D + V_t$$

(16) $$N_t^A = ET_t^A$$

Als Verhaltensgleichung für die Arbeitsnachfrage nach deutschen Arbeitskräften erhielten wir (bei bekannter Meßproblematik der offenen Stellen):[1)]

(17) $$\begin{aligned} \ln N_t^D &= \underset{(3.1)}{0.5508} + \underset{(3.9)}{0.0748}\ \ln AUS_t - \underset{(4.0)}{0.0363}\ \ln(WBS/PBWU)_t \\ &+ \underset{(0.7)}{0.0041}\ \ln(PMG/PBWU)_t + \underset{(12.7)}{0.7520}\ \ln N^D_{t-1} \\ &+ \underset{(0.8)}{0.0015}\ Q1 + \underset{(11.4)}{0.01325}\ Q2 + \underset{(10.0)}{0.0145}\ Q3 \end{aligned}$$

$$\bar{R}^2 = 0.9877$$
$$DW = 1.5062$$
$$h = 2.3329$$

---

1)Wobei N_t^D in (17) durch 1000 und *PBWU* durch 100 dividiert wurde .

Eine relative Zunahme des Auslastungsgrades um 1 Prozent führt bei gegebenem Bestand an Sachkapazitäten langfristig zu einer Erhöhung der Arbeitsnachfrage um 0.3 %, d. h. wenn der Kapazitätsauslastungsgrad beispielsweise von 80 auf 85 % steigt, bedeutet das langfristig eine Mehrnachfrage nach Arbeit um etwa 400 000 Personen. Es ist natürlich von vornherein klar, daß mit dem Kapazitätsauslastungsgrad in erster Linie konjunkturelle Schwankungen der Arbeitsnachfrage und weniger langfristige Trends beschrieben werden. Da in dieser Studie hauptsächlich die Effekte einer konjunkturellen Stabilisierungspolitik untersucht werden sollen, haben wir uns für die Spezifikation der Arbeitsnachfragefunktion (17) entschieden und dabei die Vernachlässigung anderer wichtiger Aspekte in Kauf genommen. In bezug auf die realen Bruttolohnkosten [1] errechnet sich aus (17) eine langfristige Elastizität von -0.14, d.h. ein Anstieg dieser Variablen um 10 % hätte ceteris paribus langfristig einen Rückgang der Arbeitsnachfrage um ca. 300 000 Personen zur Folge.

Zur Ermittlung der tatsächlichen Beschäftigung, d. h. der Erwerbstätigen, müssen entweder von den Angebotsvariablen L^D, L^{EG} und L^{NEG} die entsprechenden Arbeitslosen U^D, U^{EG} und U^{NEG} subtrahiert werden oder es muß noch zusätzlich eine Nachfrage nach ausländischen Arbeitskräften N^{EG} und N^{NEG} bestimmt und von N^D die offenen Stellen subtrahiert werden. Wie bereits ausgeführt, haben wir uns für die erste Möglichkeit entschieden. Zu diesem Zweck werden im Modell je

1) Diese berechnen sich als $WBS = WB(1+s)$, wobei WB der Bruttonominallohnsatz und s der Arbeitgeberbeitragssatz zur Sozialversicherung sind.

eine Arbeitslosenquote für deutsche und ausländische Erwerbspersonen geschätzt (UR^D bzw. UR^A). Die Zahl der Arbeitslosen in Personen erhält man dann sofort über die Definitionsgleichungen:

(18) $$U_t^D = UR_t^D \; L_t^D$$

(19) $$U_t^A = U_t^{EG} + U_t^{NEG} = UR_t^A(L_t^{EG} + L_t^{NEG})$$

(20) $$U_t = U_t^D + U_t^A$$

Mit Hilfe dieser Definitionsgleichungen können dann die restlichen Größen wie folgt bestimmt werden:

(21) $$ET_t^D = L_t^D - U_t^D$$

(22) $$ET_t^A = L_t^{EG} + L_t^{NEG} - U_t^A$$

(23) $$ET_t = ET_t^D + ET_t^A,$$

so daß sich die Residualgröße, offene Stellen (V_t), unter zusätzlicher Berücksichtigung der Definitionen (21) sowie (13) - (16) ermitteln läßt als:

(24) $$V_t = N_t^D + ET_t^A - L_t + U_t,$$

womit dann alle Bestandsgrößen des Arbeitsmarktes bestimmt sind.
Die Schätzgleichungen für die genannten Arbeitslosenquoten UR^D und UR^A lauten:

(25)

$$UR_t^D = 1.8493 - 0.0270\,AUS_t + 0.0974\,(WBS/PBWU)_t$$
$$(2.6) \quad (3.5) \quad (5.1)$$
$$+0.0044\,(PMG/PBWU)_t + 1.2340\,UR^D_{t-1}$$
$$(2.4) \quad (10.7)$$
$$-0.7657\,UR^D_{t-2} + 0.6439\,UR^D_{t-3} - 0.3238\,UR^D_{t-4}$$
$$(4.4) \quad (3.7) \quad (3.1)$$
$$-0.4784\,Q1 - 0.7072\,Q2 - 0.5455\,Q3$$
$$(4.5) \quad (5.9) \quad (5.7)$$
$$\bar{R}^2 = 0.9860$$
$$DW = 1.9291$$

(26)

$$UR_t^A = 2.2514 - 0.0551\,AUS_t + 0.2493\,(WBS/PBWU)_t$$
$$(1.4) \quad (3.4) \quad (5.7)$$
$$+0.0130\,(PMG/PBWU)_t + 1.3872\,UR^A_{t-1}$$
$$(3.0) \quad (13.7)$$
$$-1.1979\,UR^A_{t-2} + 0.8971\,UR^A_{t-3} - 0.3906\,UR^A_{t-4}$$
$$(7.8) \quad (5.6) \quad (4.0)$$
$$-0.3966\,Q1 - 0.7193\,Q2 - 0.4392\,Q3$$
$$(2.1) \quad (4.9) \quad (2.9)$$
$$\bar{R}^2 = 0.9727$$
$$DW = 2.1208$$

Beide Gleichungen stellen eine reduzierte Form aus Arbeitsangebot und -nachfrage dar, wobei zur Vermeidung von starken Multikollinearitäten jedoch nicht alle erklärenden Variablen jeder Gleichung berücksichtigt werden können. Im Hinblick auf den in diesem Beitrag zu untersuchenden Zusammenhang zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation ist trotz dieser durch die reduzierte Form bereits erklärten Arbeitslosigkeit der verbleibende Teil des Arbeitsmarktmodells nicht irrelevant, da z.B. in der noch zu behandelnden Lohngleichung die Arbeitsmarktsituation durch eine Variable $(V-U)/ET$ beschrieben wird, so daß eine Erklärung von V und ET durch das Modell erforderlich ist.

Ein Vergleich zwischen der Bedeutung der einzelnen Einflußfaktoren auf die Arbeitslosenquote der Deutschen respektive der Ausländer erlaubt folgende Übersicht über die Elastizitäten:

Tabelle 2: Elastizitäten in bezug auf die Arbeitslosenquote

erklärende Variable	kurzfristig		langfristig	
	UR^D	UR^A	UR^D	UR^A
Auslastungsgrad	-1,2	-2,9	-5,8	-9,9
reale Lohnkosten	0,1	0,4	0,6	1,2
Verhältnis: Preisindex importierter Vorprodukte zu Preisindex Bruttowertschöpfung	0,2	0,8	1,1	2,8

Sowohl kurz- als auch langfristig haben ausländische Arbeitskräfte bei konjunkturellen Schwankungen - respräsentiert durch den Auslastungsgrad - höhere Beschäftigungsrisiken als Deutsche. Zudem reagiert die Ausländerbeschäftigung stärker auf (Faktor-)Preiserhöhungen.

Die letzten beiden Strukturgleichungen betreffen die Lohn- und Preisbestimmung, die im wesentlichen auf den aus der Literatur zur Phillipskurve bekannten Funktionen aufbauen und daher eine ausführliche Kommentierung überflüssig erscheinen lassen.[1] Wesentliche Bestimmungsfaktoren der Lohnwachstumsrate (*WWB*) sind die Inflationsrate der Konsumgüterpreise (*WPC*), die Wachstumsrate der Arbeitsproduktivität (*WAPR*) sowie der bereits erwähnte Indikator für die

1) Siehe Franz (1978b, 1983a, 1983b).

Arbeitsmarktsituation $(V\text{-}U)/ET$.

(27)
$$WWB_t = -0.0202 + 0.5740\, WPC_{t-1} + 0.7383\, WAPR_t$$
$$\quad\quad (1.7) \quad\quad (3.7) \quad\quad\quad\quad (4.9)$$
$$+ 0.2639\, (V\text{-}U)/ET_{t-1} + 0.5741\, WWB_{t-1}$$
$$(2.9) \quad\quad\quad\quad (6.6)$$
$$\bar{R}^2 = 0.7021$$
$$DW = 2.0199$$
$$h = 0.1244$$

(28)
$$WPC_t = 0.0133 + 0.0708\, WWBS + 0.0096\, WPMG_t$$
$$\quad\quad (1.6) \quad\quad (3.7) \quad\quad\quad\quad (1.8)$$
$$-\, 0.2660\, WAPRT_t + 0.8226\, WPC_{t-1}$$
$$(1.7) \quad\quad\quad\quad (17.6)$$
$$\bar{R}^2 = 0.9220$$
$$DW = 1.9188$$
$$h = 0.3752$$

Die Inflationsrate der Konsumgüterpreise wird von der Wachstumsrate der Bruttolohnkosten, der Inflationsrate für importierte Vorprodukte und vom Wachstumstrend der Arbeitsproduktivität bestimmt. Die Begründung für die letztgenannte Variable ist, daß Unternehmen z.B. aufgrund kontrakttheoretischer Überlegungen zwar nicht jede Produktivitätsveränderung zum Anlaß für Preisrevisionen nehmen, den Trend dieser Entwicklung hingegen nicht unberücksichtigt lassen.

Einen langfristigen Zusammenhang zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit erhält man durch Einsetzen der langfristigen Lösung von (27) in die von (28) und unter der zusätzlichen, sicherlich restriktiven Annahme, daß $WWB = WWBS$ und $WAPR = WAPRT$:

(29)
$$WPC = 0.12 - 1.8\, WAPR + 0.5\, (V\text{-}U)/ET + 0.1\, WPMG.$$

Demnach führt eine um einen Prozentpunkt geringere Arbeitslosenquote *U/ET* bei Konstanz der offenen Stellen zu einem Inflationsanstieg um 0.5 Prozentpunkte. Im Vergleich zu einer neueren Phillipskurvenschätzung für den Zeitraum 1965I - 1981IV ist dieser Effekt nur etwa halb so groß wie in jener Studie.[1] Auch der Einfluß des Produktivitätsfortschritts ist dort höher ausgewiesen. Neben der Beobachtungsperiode unterscheiden sich die Schätzungen jedoch auch durch die Einbeziehung weiterer Variablen, so daß ein Vergleich erschwert wird.

4. Methodische Hinweise zum stochastischen Kontrollansatz

In diesem Abschnitt soll ganz kurz auf die methodische Vorgehensweise und die damit verbundenen Probleme eingegangen werden. Angesichts einer umfangreichen Literatur[2] ist eine eingehendere Darstellung indessen nicht beabsichtigt.

Ausgangspunkt der Analyse ist bekanntlich ein ökonometrisches Modell

(30) $$y_t = Ay_{t-1} + Cx_t + d_t + u_t,$$

in dem y_t einen Vektor der endogenen Variablen, d_t einen Vektor der exogenen Variablen, x_t einen Vektor von Kontrollvariabllen, A und C Koeffizientenmatrizen und u_t einen Vektor zeitlich unkorrelierter Redisiduen mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix Γ bezeichnen. Das Modell (30) zerfällt in eine deterministische Komponente

---

1)Siehe Franz (1983b).
2)Z.B. Chow (1975, 1981), Friedman (1973), Stöppler (1979).

(31) $\bar{y}_t = A\bar{y}_{t-1} + C\bar{x}_t + d_t$,

die man aufgrund von $u_t = 0$ erhält, sowie einen stochastischen Teil

(32) $y^*_t = Ay^*_{t-1} + Cx^*_t + u_t$,

wobei $y^*_t = y_t - \bar{y}_t$ und $x^*_t = x_t - \bar{x}_t$. Unterstellt sei weiterhin ein quadratisches und in y_t additives Kostenfunktional

(33) $$EW = \sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t) + E \sum_{t=1}^{T} y_t^{*\prime} K_t y_t^*,$$

in dem a_t die gewünschten Zielpfade der endogenen Variablen und K_t die Gewichte, mit denen die Abweichungen der einzelnen endogenen Variablen von ihren wirtschaftspolitisch gewünschten Werten bewertet werden, kennzeichnen.[1] Dann besteht das Problem darin, eine Politik

(34) $x_t = G_t y_{t-1}$

zu finden, die das Kostenfunktional (33) unter der Nebenbedingung des ökonometrischen Modells (30) minimiert. Dabei wird in zwei Schritten vorgegangen: zunächst wird der deterministische Teil des Kostenfunktionals unter der Nebenbedingung (31) im Hinblick auf $\bar{x}_t$ minimiert; dann folgt eine Minimierung des stochastischen Terms in (33) im

---

1) Der aufgrund der Symmetrieeigenschaft von (33) mögliche Nachteil, daß positive und negative Abweichungen vom Sollpfad gleichermaßen bestraft werden (z.B. bei Arbeitslosenquoten, Inflationsraten) läßt sich durch eine ehrgeizige Zielformulierung vermeiden, so daß die tatsächlichen Werte z. B. immer oberhalb der Zielwerte liegen. Eine Alternative dazu wäre Friedmans (1973) stückweise, quadratische Kostenfunktion.

Hinblick auf x^*_t unter der Nebenbedingung (32). Die optimale Politik besteht dann aus der Summe der Lösungen für $\bar{x}_t$ und x^*_t. Die Lösungsalgorithmen basieren entweder auf Lagrange-Multiplikatoren oder - wie in diesem Beitrag - auf Bellmans Prinzip der dynamischen Programmierung.

Die wesentlichen Unterschiede zwischen dem deterministischen und stochastischen Kontrollansatz liegen nicht in den Gleichungen des Problems, auf die die Störgrößen keinen Einfluß haben. Vielmehr sind die Zeitpfade für die optimalen Werte für x_t und der mit ihnen verbundenen Werte y_{t-1} nunmehr stochastisch, mit der Folge, daß im Gegensatz zum deterministischen Modell ($u_t = 0$) im Ausgangszeitpunkt die optimalen Werte für x_t nicht mehr für alle künftigen Zeitperioden berechnet werden können, sondern jeder künftige optimale Wert von x_t erst nach Kenntnis der entsprechenden stochastischen Variablen y_{t-1} bestimmt werden kann. Außerdem ist der aufgrund von (33) berechnete Wohlfahrtsverlust im stochastischen Fall höher: zusätzlich zu den Kosten der Abweichung der deterministischen Variablen $\bar{y}_t$ von ihrem Zielpfad a_t entstehen Kosten der Abweichungen von y_t von $\bar{y}_t$, wobei die stochastische Komponente des Wohlfahrtsverlustes durchaus größer sein kann als die deterministische.

Die Konsequenzen für die Wirtschaftspolitik liegen auf der Hand: im Gegensatz zum deterministisch formulierten Tinbergen-Theorem kann auch bei einer Gleichheit von wirtschaftspolitischen Zielen und Instrumenten nicht erwartet werden, daß die stochastische Zeitreihe y_t den wirtschaftspolitischen Zielvorstellungen entspricht.

Abgesehen von der Evaluierung optimaler wirtschaftspolitischer Strategien kann die Kontrolltheorie auch die Auswirkung dieser Maßnahmen auf wirtschaftspolitische Zielkonflikte aufzeigen, z. B. auf den durch die Phillips-

kurve beschriebenen Zusammenhang zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation. Da dieser "trade-off" vermutlich nicht invariant ist gegenüber alternativen wirtschaftspolitischen Maßnahmenbündeln, liegt es natürlich nahe, einen "optimalen trade-off" zu berechnen, der auf der Basis optimaler wirtschaftspolitischer Maßnahmen beruht. Die Vorgehensweise kann besonders einfach für den statischen und deterministischen Fall graphisch aufgezeigt werden. Das im vorhergehenden Abschnitt dargestellte ökonometrische Modell liefert eine "langfristige" Phillipskurve [vgl. Gleichung (29)]:

(35) $$WPC = a_0 - a_1 UR + a_2 Z.$$

wobei *WPC* die Inflationsrate, *UR* die Arbeitslosenquote und *Z* ein Vektor der restlichen erklärenden Variablen (d.h. *WAPR*, *VET* und *WPMG*) darstellen. Unterstellt sei weiterhin ein Kostenfunktional

(36) $$W = k_1 (WPC - WPC^*)^2 + k_2 (UR - UR^*)^2.$$

wobei die mit * bezeichneten Größen die wirtschaftspolitisch gewünschten Zielwerte von *WPC* und *UR* angeben. Wenn im einfachsten Fall $k_1 = k_2 = 1$ und $WPC^* = UR^* = 0$ gesetzt werden, liegen die Isoverlustpunkte auf einem Kreis. Der Tangentialpunkt der Phillipskurve mit der am weitesten zum Ursprung des Koordinatensystems verschobenen Isoverlustkurve gibt dann - falls er existiert - einen Punkt eines optimalen "trade-offs" zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit an. Für andere Werte der Gewichte k_1 und k_2 erhält man natürlich andere Isoverlustkurven[1].

---

1)Z.B. läßt eine Erhöhung von k_1 bei konstantem k_2 die Isoverlustkurve die Gestalt einer Ellipse annehmen. Beiläufig sei darauf hingewiesen, daß das Optimierungsergebnis nicht von den absoluten, sondern nur von den relativen Werten der Gewichte abhängt.

Um nun die Frage beispielsweise nach der niedrigsten Inflationsrate bei einer tolerablen Arbeitslosenquote von $UR^* = 3.0$ zu beantworten, setzt man für k_1 einen hohen, für k_2 einen niedrigen Wert an (also z. B. $k_1 = 1000$ *und* $k_2 = 1$) und für $WPC^* = 0$ und $UR^* = 3.0$.[1] Minimierung der Verlustfunktion $W = 1000\ WPC^2 - (UR-3.0)^2$ unter der Nebenbedingung der Phillipskurve liefert einen Wert der Arbeitslosenquote in der Nähe von 3 v. H. und die dazugehörige mimimale Inflationsrate. Ehrgeizigere Beschäftigungsziele (z.B $UR^* = 2.0$) müssen dann mit einer höheren, jedoch minimalen Inflationsrate erkauft werden. Im dynamischen Kontext wird die Verlustfunktion

$$(37) \qquad W = \sum_{t=1}^{T} \left[k_{1t}(WPC_t - WPC_t^*)^2 + k_{2t}(UR_t - UR_t^*)^2 \right]$$

unter der Nebenbedingung des dynamischen ökonometrischen Modells minimiert. In Wiederholung des obigen Beispiels wird der optimale Zeitpfad der Inflationsrate durch diesen Ansatz ermittelt, indem man z.B. $k_{1t} = 1000$, $k_{2t} = 1$, $WPC_t^* = 0$ und $UR_t^* = 3.0$ setzt. Weitere Zeitpfade für WPC_t berechnen sich durch Vorgabe alternativer Werte für UR_t^*. Eine zusammenfassende graphische Darstellung dieser Zeitpfade erfolgt zweckmäßigerweise in einem Diagramm, in dem auf der Ordinate die RMS-Werte der Inflationsrate, auf der Abszisse die der Arbeitslosenquote abgetragen werden.[2]

---

1) Siehe Chow (1981, S. 115).

2) Der *RMS*-Wert (*RMS* = root mean squared) einer Variablen ist definiert als

$$RMS(x) = \left(\sum_{t=1}^{T} x_{it}^2 / T \right)^{\frac{1}{2}} \; mit\, x_{it} = Optimalpfad.$$

5. Die Berechnung des "trade-off's" zwischen Inflationsrate und Arbeitslosenquote

Das kontrolltheoretische Instrumentarium ermöglicht die Kalkulation eines potentiellen "trade-off's" zwischen Inflationsrate und Arbeitslosenquote unter Berücksichtigung des ökonometrischen Modells auf folgende Weise [1]:

1) Der Nominalpfad der Arbeitslosenquote (*UR*) wird in entsprechender Höhe vorgegeben,
2) Vorgabe des Nominalpfades der Inflationsrate (*WPC*) in geringer Höhe,
3) In der Verlustfunktion wird der Gewichtungsfaktor von *UR* sehr hoch und der von *WPC* minimal angesetzt,
4) Variation der Nominalpfade von *UR*.

Die Existenz eines "trade-off's" ist dann gegeben, wenn die *RMS*-Werte von *UR* sukzessive steigen und die von *WPC* sukzessive fallen, d. h. daß die übliche Annahme, daß bei hoher Arbeitslosigkeit eine geringe Inflationsrate und vice versa existiert, bestätigt wird. Für den hier zu berechnenden "trade-off" wurde die Verlustfunktion wie folgt formuliert:

$$W = \sum_{t=1}^{20} k_1 \left(\hat{WPC}_t - WPC_t^* \right)^2 + \sum_{t=1}^{20} k_2 \left(\hat{UR}_t - UR_t^* \right)^2 \tag{38}$$

mit $k_1 = 10\,000$, $k_2 = 0.01$, $WPC_t{}^* = 2\ \%$, $UR_t{}^* = 1\ \%$, $2\ \%$, $3\ \%$, $4\ \%$, 5%, $6\ \%$ und $7\ \%$, wobei die mit $\wedge$ gekennzeichneten Größen die sich ergebenden Optimalpfade sind. Die Kontrollvariablen *AUS* und *PMG* wurden nicht gewichtet, um die Berechnung des "trade-off's" nicht durch die historischen Pfade der Kontrollvariablen zu beeinflussen.

---

1) Siehe Chow (1981, S. 115 ff).

Tabelle 3 zeigt die Vorgehensweise und die Ergebnisse zur Kalkulation des "trade-off's" unter Berücksichtigung des in Kapitel 3 beschriebenen ökonometrischen Modells.

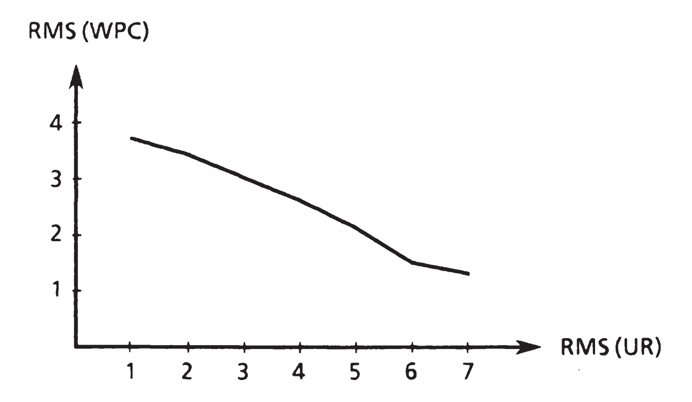
In Spalte 1 der Tabelle 3 sind die alternativen Nominalpfade im Planungszeitraum für die Arbeitslosenquote (*UR*) angegeben. In einer Schrittweite von *1* %, ausgehend von einer einprozentigen Arbeitslosenquote, wurden sieben Läufe durchgeführt. Die Gewichtung der Arbeitslosenquote (Spalte 2) betrug für *UR* durchgehend 10000. Dieser hohe Gewichtungsfaktor garantiert die exakte Zielerreichung, daß heißt, die Abweichungen zwischen Optimalpfad und Nominalpfad waren dadurch vernachlässigbar klein, was durch die *RMS*-Werte der Spalte 3 zum Ausdruck kommt. Der Nominalpfad der Inflationsrate (*WPC*), dargestellt in Spalte 4, betrug in allen Läufen *2* %. Durch den niedrigen Gewichtungsfaktor von *0.01* (Spalte 5) wurde die Inflationsrate zwar in der Verlustfunktion berücksichtigt, sie konnte sich, da Abweichungen vom Nominalpfad nur minimal bestraft wurden, jedoch frei entwickeln, wie die *RMS*-Werte der Spalte 6 zeigen. Ein Vergleich der Spalten 3 und 6, dargestellt im Schaubild 2 zeigt, daß sich ein linearer "trade-off" zwischen Arbeitslosenquote und Inflationsrate ergab. Zum Beispiel führt eine Senkung der Inflationsrate von *2.6* % auf *2.08* % zu einer Erhöhung der Arbeitslosenquote von *4* % auf 5 %. Die in der Tabelle 3 ausgewiesenen Kosten (Spalte 7 bis 9) für jeden Lauf, sind in die totalen Kosten (Spalte 7), in den deterministischen Anteil (Spalte 8) und in den stochastischen Anteil (Spalte 9) aufgeteilt.

Tabelle 3: Berechnung des trade-off zwischen Inflationsrate (WPC) und Arbeitslosenquote (UR)

UR			WPC			Kosten		
Nominal-pfad (1)	Gewich-tung (2)	RMS[1] (3)	Nominal-pfad (4)	Gewich-tung (5)	RMS[1] (6)	total (7)	deter-ministisch (8)	sto-chastisch (9)
1 %	10 000	1.0	2 %	0.01	3.773	50 739.27	2 082.87	48 656.40
2 %	10 000	2.0	2 %	0.01	3.438	49 930.48	1 001.75	48 928.73
3 %	10 000	3.0	2 %	0.01	3.051	49 723.12	344.44	49 378.68
4 %	10 000	4.0	2 %	0.01	2.601	50 142.90	137.97	50 004.93
5 %	10 000	5.0	2 %	0.01	2.080	51 245.20	412.94	50 832.26
6 %	10 000	6.0	2 %	0.01	1.498	53 049.68	1 226.07	51 823.61
7 %	10 000	7.0	2 %	0.01	1.329	55 564.25	2 726.39	52 837.86

1) *RMS (root mean squared) ist berechnet als* $(\sum_{t=1}^{T} x_{i,t}^2 / T)^{1/2}$, *wobei* $x_{i,t}$ = *Optimalpfad und* T = *Planungszeitraum.*

Schaubild 2: Trade-Off zwischen Arbeitslosigkeit und Inflation



Die Berechnung der Kosten folgt aus der quadratischen Verlustfunktion[1])

(39 a) $$W = E \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)' K_t (y_t - a_t)$$

(39 b) $$W = \sum_{t=1}^{T} E (y_t - \bar{y}_t)' K_t (y_t - \bar{y}_t) + \sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t)$$

(39 c) $$W = \sum_{t=1}^{T} sp\,(K_t \Gamma_t) + \sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t),$$

wobei $\sum_{t=1}^{T} sp\,(K_t \Gamma_t)$ *den stochastischen und* $\sum_{t=1}^{T} (\bar{y}_t - a_t)' K_t (\bar{y}_t - a_t)$

den deterministischen Kostenanteil bezeichnet.

1) Siehe Chow (1981).

Γ_t ist die Varianz-Kovarianzmatrix, resultierend aus den Residuen des geschätzten ökonometrischen Modells. Im vorliegenden Fall ist Γ_t eine Diagonalmatrix mit den Elementen

$$a_{jj} = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t^2 ,$$

d. h. die Elemente der Hauptdiagonale von Γ_t sind identisch mit den Standardfehlern der Regression jeder geschätzten Gleichung des ökonometrischen Modells.

Der Vektor $\bar{y}_t$ ist die Lösung des deterministischen Teils der Differenzengleichung 1.Ordnung aus der reduzierten Form des Modells, d. h. für

(40) $$\bar{y}_t = A\bar{y}_{t-1} + C\bar{x}_t + d_t .$$

dann folgt als Lösung für $\bar{y}_t$, die finale Form [1]

(41) $$\bar{y}_t = A^t\bar{y}_0 + C\bar{x}_t + AC\bar{x}_{t-1} + \ldots + A^{t-1}C\bar{x}_1 + d_t + Ad_{t-1} + \ldots + A^{t-1}d_1$$

Der Vektor a_t sind die vorgegebenen Nominalpfade und K_t die Gewichtungsmatrix, die bei dieser Untersuchung jedoch zeitunabhängig ist.

Spalte 7 der Tabelle 3 zeigt die Ergebnisse der Gesamtkosten je Lauf, wobei sich bei einem Nominalpfad von *3 %* für die Arbeitslosenquote und *2 %* für die Inflationsrate die "volkswirtschaftlich günstigste" Version ergab. Der deterministische Kostenanteil erreicht bei gegebenem *WPC* sein Minimum bei einer *4*%igen Arbeitslosenquote, um dann sukzessive bis zum Maximalwert anzusteigen. Der durchweg

---

1) Siehe Chow (1975, S. 106 ff).

extrem hohe stochastische Anteil an den Gesamtkosten zwischen *95* % und fast *100* % in Tabelle 4 verdeutlicht die Wichtigkeit der Berücksichtigung der Residualgrößen bei der Berechnung des "trade-off's", d. h. die bei der Schätzung des ökonometrischen Modells auftretenden Residuen, resultierend aus einer potentiellen Fehlspezifikation des Modells, Fehlern in den Variablen oder einer falschen funktionalen Form einzelner Gleichungen, können kaum vernachlässigt werden.

Tabelle 4: Nominalpfade und stochastischer Kostenanteil

Nominalpfad		stochastischer Kostenanteil an Gesamtkosten in v. H.
UR	WPC	
1 %	2 %	95.9
2 %	2 %	98.0
3 %	2 %	99.3
4 %	2 %	99.7
5 %	2 %	99.2
6 %	2 %	97.7
7 %	2 %	95.1

Eine rein deterministische Untersuchung verringert zwar die Kosten und damit einhergehend die Unsicherheit, kann aber durch die Vernachlässigung der stochastischen Komponente zu falschen Ergebnissen und damit zu falschen wirtschaftspolitischen Aussagen führen.

Literaturverzeichnis

Chow, Gregory C. (1975), Analysis and Control of Dynamic Systems, New York (John Wiley & Sons).

Chow, Gregory C. (1981), Econometric Analysis by Control Methods, New York (John Wiley & Sons).

Feige, Edgar L. und Duncan G. Pearce (1976), Economically Rational Expectations: Are Innovations in the Rate of Inflation Independent of Innovations in Measures of Monetary and Fiscal Policy?, Journal of Political Economy 84, 499-522.

Franz, Wolfgang (1978a), Neuere Ergebnisse einer makroökonometrischen Analyse des Arbeitsmarktes der Bundesrepublik Deutschland, in: Institut für Arbeitsmarkt- und Berufsforschung (Hrsg.), Probleme bei der Konstruktion sozioökonomischer Modelle, Beiträge zur Arbeitsmarkt- und Berufsforschung 31, Nürnberg, 1-38.

Franz, Wolfgang (1978b), Eine empirische Überprüfung des Konzepts der natürlichen Arbeitslosenquote für die Bundesrepublik Deutschland, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 134, 442-463.

Franz, Wolfgang (1981), Employment Policy and Labor Supply of Foreign Workers in the Federal Republic of Germany: A Theoretical and Empirical Analysis, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 137, 590-611.

Franz, Wolfgang (1983a), The Past Decade's Natural Rate and the Dynamics of German Unemployment: A Case Against Demand Policy? European Economic Review 21, 51-76.

Franz, Wolfgang (1983b), Wohin treibt die Phillipskurve? Theoretische und empirische Untersuchungen zur inflationsstabilen Arbeitslosenquote in der Bundesrepublik Deutschland, Institut für Volkswirtschaftslehre und Statistik der Universität Mannheim, Discussion-Paper No. 3249-83, Mannheim (erscheint in: Zeitschrift für Wirtschafts- und Sozialwissenschaften 104 (1984)).

Franz, Wolfgang und Theo Kempf (1983), Teilprojekt Arbeitsmarkt des Mannheimer Simulationsmodells, Arbeitspapier.

Friedman, Benjamin M. (1973), Methods in Optimization for Economic Stabilization Policy, Amsterdam (North-Holland).

Friedman, Benjamin M. (1979), Optimal Expectations and the Extreme Information Assumptions of "Rational Expectation "Macromodels, Journal of Monetary Economics 5, 23-41.

Kydland, Finn E. und Edward C. Prescott (1977), Rules Rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans, Journal of Political Economy 85, 473-491.

Lucas, Robert E. Jr. und Leonard A. Rapping (1970), Real Wages, Employment, and Inflation, in: Edmund S. Phelps et. al. (Hrsg). Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory, London (Macmillan), 257-305.

Lucas, Robert E. Jr. und Thomas J. Sargent (1978), After Keynesian Macroeconomics, in: Federal Reserve Bank of Boston, After the Phillips Curve: Persistence of High Inflation and High Unemployment, Conference Series 19, 49-72, wiederabgedruckt in: Robert E. Lucas Jr. und Thomas J. Sargent (Hrsg.), Rational Expectations and Econometric Practice, University of Minnesota Press 1981, 295-319.

Sims, Christopher A. (1982), Policy Analysis with Econometric Models, Brookings Papers on Economic Activity 1:1982, 107-152.

Stöppler, Siegmar (Hrsg.) (1979), Dynamische ökonomische Systeme. Analyse und Steuerung, Wiesbaden (T. Gabler).

Kontrolltheoretische Ansätze zur Bestimmung von Feedback-Regeln: Eine Sensitivitätsanalyse*)

Harald Frommholz
Jürgen Wolters

---

1. Einleitung

Kontrolltheoretische Ansätze ermöglichen im Hinblick auf ein vorgegebenes Zielsystem eine optimale Steuerung dynamischer Systeme. Durch den Einsatz bestimmter Politiken (Instrumente) kann man die Zeitpfade ökonomischer Variablen in eine gewünschte Richtung lenken. Grundlagen für die Anwendung der Kontrolltheorie sind ein ökonometrisches Modell, das die Quantifizierung der Wirkungszusammenhänge ökonomischer Prozesse liefert und eine Zielfunktion, die die wirtschaftspolitische Präferenzordnung sowie die gewünschten Zielpfade des Entscheidungsträgers repräsentiert. Die Bestimmung des "optimalen" Instrumenteneinsatzes ergibt sich, wenn die vorgegebene Zielfunktion unter der Nebenbedingung des geschätzten ökonometrischen Modells optimiert wird. Ansätze dieser Art finden häufig An-

---

*) Unseren Kollegen G. Flaig, W. Franz, W. Gaab, W. Höllenschmitt, T. Kempf, H. Kräger und K. Zimmermann sei an dieser Stelle für kritische Hinweise recht herzlich gedankt.

wendung zur Ableitung stabilisierungspolitischer Regeln.[1)]

Vollständige Stabilisierung oder Kontrollierbarkeit, d. h. die Optimalpfade für die Zielvariablen stimmen mit den entsprechenden vom Wirtschaftspolitiker gewünschten Werten überein, würde formal der Optimierung ohne Berücksichtigung der durch das ökonometrische Modell gegebenen Restriktionen entsprechen. Diese Restriktionen können aber eine vollkommene Anpassung verhindern. Im statischen linearen Modell, wie es von Tinbergen (1952) zur Bestimmung quantitativer wirtschaftspolitischer Aussagen benutzt wurde, ist notwendig und hinreichend für die statische Kontrollierbarkeit, daß die Anzahl der Ziel- und Instrumentvariablen übereinstimmt, und daß die Instrumente aufgrund der Modellverknüpfungen linear unabhängig sind. Die dynamische Kontrollierbarkeit im linearen dynamischen Modell verlangt, daß Matrizen dynamischer Multiplikatoren gewisse lineare Unabhängigkeitsbedingungen erfüllen. [2)]

Bei diesen Kontrollierbarkeitsbedingungen wird unterstellt, daß beliebig große Änderungen der Instrumentvariablen zugelassen sind, die häufig in der Realität nicht durchführbar sind. Der kontrolltheoretische Ansatz kann durch eine entsprechende Ausgestaltung der Zielfunktionen einerseits die Intrumentvariationen auf zulässige Bereiche beschränken und andererseits eine gute Approximation an die gewünschten Zielpfade erreichen, auch wenn die Kontrollierbarkeitsbedingungen nicht erfüllt sind.

---

1)Siehe insbesondere den Literaturüberblick von Kendrick (1976), sowie die von Frohn (1980) und Gruber (1983) herausgegebenen Sammelbände, in denen sowohl methodische als auch anwendungsorientierte Probleme ökonometrischer Entscheidungsmodelle behandelt werden.
2)Vgl. hierzu z. B. Preston und Sieper (1977).

Die so abgeleiteten Politiken werden daher von der unterstellten Zielfunktion und dem zugrundeliegenden ökonometrischen Modell beeinflußt. Die Anwendung eines solchen Verfahrens in der praktischen Wirtschaftspolitik ist aber umso erfolgreicher, je robuster die damit erzielten Ergebnisse gegenüber Fehlspezifikationen sind. Oder anders formuliert, man muß abschätzen können, wie sensitiv die Resultate sowohl auf Veränderungen im ökonometrischen Modell als auch auf Veränderungen in der Zielfunktion reagieren.

Wird die Sensitivität hinsichtlich des unterstellten Modells analysiert, so können folgende Auswirkungen, die sich auf (i) fehlspezifizierte Gleichungen, (ii) Unsicherheiten in den Strukturparametern, (iii) unsichere Modellprognosen und (iv) die unbekannte zukünftige Entwicklung der nicht kontrollierbaren (exogenen) Variablen beziehen, untersucht werden. Ein erster Ansatz hinsichtlich der Anwendbarkeit kontrolltheoretischer Methoden bei fehlspezifizierten Modellen findet sich bei Chow (1977). Probleme der Unsicherheit in der Entwicklung der exogenen Variablen und deren Auswirkungen auf die Optimalpfade analysieren Holly et. al. (1979).

Sensitivitätsanalysen, die bei der Zielfunktion ansetzen, müssen die Abhängigkeiten der Optimalpfade von (i) den vorgegebenen Zielpfaden (Sollwerten), (ii) dem Planungshorizont und (iii) der Präferenzordnung des Wirtschaftspolitikers, die sich in der Gewichtung der Abweichungen der Zielvariablen von ihren Sollwerten widerspiegeln, aufzeigen. Ein iterativer Ansatz zur Ermittlung der Gewichte bei bekannter Zielfunktion bzw. bei vorgegebenen Zielpfaden wird in Rüstem et. al. (1979) vorgeschlagen.

Für das linear-quadratische Optimierungsproblem, d. h. eine quadratische Kostenfunktion wird unter der Nebenbedingung eines linearen Modells minimiert, hat Hughes-Hallett (1979) analytisch die Auswirkungen auf die Optimalpfade aufgrund von Änderungen in den stochastischen Schocks, in den Modellparametern und in den Gewichten der Zielfunktion abgeleitet. Allerdings lassen sich hieraus keine generellen Ergebnisse sofort erkennen, so daß auch eine empirische Sensitivitätsanalyse hinsichtlich der Struktur des Modells und der Präferenzordnung durchgeführt wird. Es zeigt sich, daß für das Modell Klein 1, das der Analyse zugrunde liegt, die Optimalpfade wesentlich sensitiver gegenüber Änderungen in den Strukturparametern und Residuen reagieren als gegenüber vergleichbaren Änderungen in den Gewichten der Zielfunktion. Analytische Aussagen hinsichtlich der Auswirkungen von Änderungen der Zielpfade leitet Sandbloom (1979) für zwei einfache Fälle ab: (i) Werden alle Zielpfade im gleichen Verhältnis variiert, impliziert dies eine Änderung der Optimalpfade im gleichen Verhältnis. (ii) Werden die Zielpfade dagegen in unterschiedlichen Proportionen geändert, so reagieren die Optimalpfade mit den jeweiligen entsprechenden Veränderungen. Baum (1980) zeigt, wie sensitiv die Optimalpfade auf Veränderungen der Zielpfade und der Prognosewerte der exogenen Variablen reagieren. Weitere analytische Ergebnisse hinsichtlich der Abhängigkeit der Zielfunktionen und der Optimalpfade von den Gewichtungen und den Zielpfaden in einer beliebigen Periode finden sich in Kuhbier (1980, 1981) für das deterministische linear-quadratische Kontrollproblem. Die Auswirkungen alternativer Zielsysteme auf der Basis einer Version des Modells von Uebe für die Bundesrepublik Deutschland untersuchen Stöppler und Deissenberg (1977) empirisch.

Da das Problem der Robustheit kontrolltheoretisch abgeleiteter Politikregeln insbesondere für den Anwendungsfall von größter Wichtigkeit ist, wollen wir im folgenden eine detaillierte Sensitivitätsanalyse bezüglich Veränderungen in der Zielfunktion durchführen.[1] Es sollen dabei im einzelnen die Auswirkungen unterschiedlicher Planungshorizonte, unterschiedlicher Zielpfade, unterschiedlicher Gewichtungen sowie der Einsatz unterschiedlich vieler Instrumente auf die Optimalpfade ausgewählter Zielvariablen analysiert werden. Da der Einfluß der Zielfunktion isoliert behandelt werden soll, wird als fest vorgegebener Entscheidungsrahmen der deterministische Teil des Modells von Frowen und Arestis (1976) für die Bundesrepublik Deutschland zugrundegelegt. Da es sich hier im wesentlichen um eine methodische Arbeit handelt, wurde ein relativ einfaches lineares Modell ausgewählt, um bei der Vielzahl von durchgeführten Experimenten die Rechenzeiten in Grenzen zu halten. Die Autoren selbst benutzen ihr Modell dazu, um auf der Basis dynamischer Multiplikatoren Aussagen über die relative Wirksamkeit von Geld- und Fiskalpolitik abzuleiten. Es scheint allerdings sinnvoller zu sein, solche Überlegungen im Rahmen einer kontrolltheoretischen Untersuchung durchzuführen, da hier explizit eine Wohlfahrts- oder Kostenfunktion als Beurteilungsgrundlage enthalten ist.[2] Die folgenden Resultate

---

1)Auch wenn eine Reihe analytischer Ergebnisse hinsichtlich der Abhängigkeit der Optimalpfade von Parametern der Zielfunktion abgeleitet wurden, sind die vorliegenden Formeln i. a. so komplex, daß sie nicht allgemein interpretiert werden können, sondern auch für vorgegebene numerische Werte ausgewertet werden müssen.

2)Auf dem Modell von Frowen und Arestis (1976) basiert auch die von Frommholz und Wolters (1983) durchgeführte Untersuchung der relativen Effizienz von Geld- und Fiskalpolitik, wobei die dynamischen stochastischen Eigenschaften des geregelten Modells im Frequenzbereich im Vordergrund der Analyse standen.

basieren auf einer quadratischen Verlustfunktion.[1]

Zunächst wird kurz der Algorithmus zur Lösung des linear-quadratischen Optimierungsproblems für den deterministischen Fall dargestellt. Daran schließt sich eine Beschreibung des ökonometrischen Modells an. Danach werden in sechs verschiedenen Experimenten Sensitivitätsanalysen hinsichtlich des Planungshorizontes, hinsichtlich der Sollpfade, hinsichtlich der Gewichtungen und hinsichtlich der Anzahl der eingesetzten Instrumente durchgeführt.

2. Der Kontrollalgorithmus zur Lösung des linear-quadratischen deterministischen Entscheidungsproblems

In diesem Abschnitt formulieren wir kurz den Kontrollalgorithmus von Chow (1975), der hier zur Ermittlung einer optimalen Entscheidung verwendet wird. Wir beschränken uns auf die Darstellung eines Entscheidungsmodells mit deterministischem[2], linearem Zustandssystem und quadratischer Zielfunktion sowie einem endlichen Planungszeitraum, der aus T diskreten Perioden besteht, wobei T der Planungshorizont ist.

Als Instrumentvariablen u_t (Entscheidungsvariablen) bezeichnen wir die vorherbestimmten Variablen, die der Entscheidungsträger zur Steuerung der endogenen Variablen y_t einsetzen kann. Die exogenen Variablen z_t, die nicht im

1) Auf die Probleme und möglichen Modifikationen quadratischer Zielfunktionen soll hier nicht näher eingegangen werden. Man kann diesen Ansatz als eine Taylorreihen-approximation zweiter Ordnung für die wahre nichtlineare Zielfunktion ansehen.

2)Die Berücksichtigung stochastischer Elemente impliziert in der Regel alternative optimale Politiken. Vgl. hierzu den Artikel von Frommholz (1984) in diesem Band.

Einflußbereich der Entscheidungsinstanz liegen, werden außerhalb des Modells bestimmt. Es wird unterstellt, daß ihre Werte für den Optimierungsvorgang in jeder Periode bekannt sind.

Die Zustandsform des dynamischen, linearen Modells kann immer (durch Einführung von Hilfsvarialen) als Differenzengleichungssystem 1. Ordnung dargestellt werden. In der reduzierten Form erhalten wir für den Zustandsvektor Y_t:

(1) $$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t u_t + C_t z_t, \qquad t = 1,\dots,T.$$

In dieser Konstruktion enthält der Zustandsvektor Y_t neben den Hilfsvariablen, um die verzögerten endogenen Variablen mit einem lag größer als eins zu erfassen, auch den Vektor u_t und dessen verzögerte Werte. Es sei Y_t ein n-dimensionaler Spaltenvektor, u_t ein r-Vektor und z_t ein s-Vektor. A_t, B_t und C_t seien zeitvariable Matrizen entsprechender Dimension, deren Elemente bekannt sind. Der Anfangszustand Y_o sei vorgegeben. Als Zielfunktion wählen wir hier die quadratische Verlustfunktion, die die Summe aller quadrierten Abweichungen zwischen den Elementen des Zustandsvektors Y_t und den jeweils entsprechenden vorgegebenen Sollwerten a_t minimiert:

(2) $$W = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2}(Y_t - a_t)' K_t (Y_t - a_t) \rightarrow Min.$$

Die Elemente von K_t nennen wir Gewichte (Gewichtungsmatrix), sie können auch als Kostenfaktoren interpretiert werden. K_t sei eine zeitabhängige, positiv semidefinite Diagonalmatrix (diese Annahme ist wichtig für ein eindeutiges Optimum). Häufiger Kritikpunkt an der Verlustfunktion ist ihre Symmetrieeigenschaft, d. h. positive und negative Abweichungen vom Sollwert werden gleich bewer-

tet[1], außerdem werden größere Abweichungen überproportional bestraft.
Um das Optimierungsproblem

(3) $$W = \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2}(Y_t - a_t)' K_t (Y_t - a_t) \rightarrow Min.$$

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B_t u_t + C_t z_t, \quad t = 1,\ldots T; \qquad Y_0\, gegeben,$$

zu lösen, soll hier der Lagrange-Ansatz angewandt werden. Die Lagrangefunktion lautet:

(4) $$L(Y_t, u_t, \Lambda_t) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} (Y_t - a_t)' K_t (Y_t - a_t) - \sum_{t=1}^{T} \Lambda_t' (Y_t - A_t Y_{t-1} - B_t u_t - C_t z_t),$$

wobei die Lagrangemultiplikatoren in einem n-dimensionalen Spaltenvektor Λ_t zusammengefaßt sind. Differentiation der Lagrangefunktion nach den Variablen Y_t, u_t, Λ_t für $t = 1,\ldots,T$ und Nullsetzen der Ableitungen führt auf

(5) $$\frac{\partial L}{\partial Y_t} = K_t (Y_t - a_t) - \Lambda_t + A_{t+1}' \Lambda_{t+1} = 0, \qquad t = 1,\ldots,T; \ \Lambda_{T+1} = 0,$$

(6) $$\frac{\partial L}{\partial u_t} = B'_t \Lambda_t = 0, \qquad t = 1,\ldots,T,$$

(7) $$\frac{\partial L}{\partial \Lambda_t} = -(Y_t - A_t Y_{t-1} - B_t u_t - C_t z_t) = 0, \qquad t = 1,\ldots,T.$$

Die Lösung des Gleichungssystems (5)-(7) erfolgt rückwärts im Planungszeitraum für t = T, T-1,...,1.

---

1) Eine Möglichkeit, diese Symmetrieannahme aufzuheben, besteht in der Verwendung von stückweise quadratischen Verlustfunktionen, wie sie von Friedman (1975) vorgeschlagen werden.

Für t = T gilt wegen (5)

(8)
$$\lambda_T = K_T Y_T - K_T a_T = H_T Y_T - h_T$$

$$mit\ H_T = K_T\ und\ h_T = K_T a_T.$$

Aus (6), (7) und (8) erhalten wir für t = T:

(9)
$$B'_T \lambda_T = 0 = B'_T (H_T A_T Y_{T-1} + H_T B_T u_T + H_T C_T z_T - h_T).$$

Somit ergibt sich

(10)
$$u_T = G_T Y_{T-1} + g_T$$

$$mit\ G_T = -(B'_T H_T B_T)^{-1} B'_T H_T A_T$$

$$und\ g_T = -(B'_T H_T B_T)^{-1} B'_T (H_T C_T z_T - h_T).$$

Die Matrizen $B'_t H_t B_t\ (t = 1,\dots,T)$ sind quadratisch von der Ordnung r und, um eine eindeutige Lösung zu erhalten, nehmen wir an, daß sie regulär seien.

Aus (7) und (10) folgt:

(11)
$$Y_T = (A_T + B_T G_T) Y_{T-1} + B_T g_T + C_T z_T.$$

Setzen wir (11) in (8) ein, so erhalten wir:

(12)
$$\lambda_T = H_T (A_T + B_T G_T) Y_{T-1} + H_T (C_T z_T + B_T g_T) - h_T.$$

Aus (12) und (5) folgt für T-1

(13)
$$\lambda_{T-1} = H_{T-1} Y_{T-1} - h_{T-1}$$

$$mit\ H_{T-1} = K_{T-1} + A'_T H_T (A_T + B_T G_T)$$

$$und\ h_{T-1} = K_{T-1} a_{T-1} - A'_T H_T (C_T z_T + B_T g_T) + A'_T h_T\ ,$$

und damit wegen (10) G_{T-1} und g_{T-1}. Dieses Verfahren wird wiederholt für T-2, T-3, usw. Es ergibt sich somit ein vom

Ende der Planungsperiode her berechnetes System von Matrizen und Vektoren:

$$H_T, h_T; G_T, g_T; H_{T-1}, h_{T-1}; G_{T-1}, g_{T-1}; \dots$$

Für beliebige t zwischen 1 und T gelten folgende Beziehungen:

(14) $$u_t = G_t Y_{t-1} + g_t \quad und \quad \lambda_t = H_t Y_t - h_t,$$

sowie

$$G_t = -(B'_t H_t B_t)^{-1} B'_t H_t A_t,$$
$$g_t = -(B'_t H_t B_t)^{-1} B'_t (H_t C_t z_t - h_t),$$

(15)

$$H_{t-1} = K_{t-1} + A'_t H_t (A_t + B_t G_t), \qquad H_T = K_T,$$
$$h_{t-1} = K_{t-1} a_{t-1} + (A_t + B_t G_t)'(h_t - H_t C_t z_t), \quad h_T = K_T a_T.$$

Hiermit ist das deterministische lineare Entscheidungsproblem gelöst, die optimale Entscheidungsregel (14) ist linear und stellt i.a. eine Kombination aus proportionaler und differentialer Politik dar.

Der optimale Zustandsverlauf wird entsprechend

(16) $$Y_t = (A_t + B_t G_t) Y_{t-1} + B_t g_t + C_t z_t, \qquad t = 1, \dots, T.$$

berechnet. Die minimalen Kosten ergeben sich durch Einsetzen von (16) in die Verlustfunktion.

3. Das ökonometrische Modell

Für die Durchführung einer Sensitivitätsanalyse bezüglich der Zielfunktion dient das ökonometrische Modell von Frowen und Arestis (1976)[1] für die Bundesrepublik Deutsch-

---

1) Siehe auch Arestis, Frowen und Karakitsos (1978).

land als Nebenbedingung zur Beschreibung des Wirtschaftsablaufs. Es handelt sich hierbei um ein hochaggregiertes lineares dynamisches Modell typisch keynesianischer Bauart, wie es häufig bei Fragestellungen des "demand management" benutzt wird. Neben den wesentlichen Komponenten des Bruttosozialprodukts enthält das Modell auch eine Geldangebots- und Geldnachfragefunktion. Entsprechend dem Anliegen der Autoren kann somit die Wirksamkeit geld- und fiskalpolitischer Maßnahmen in diesem Modell untersucht werden, wobei die Geldbasis und die Staatsausgaben als Instrumentvariablen gewählt werden. Das ursprüngliche Modell wurde um eine Definitionsgleichung für den Leistungsbilanzsaldo erweitert, so daß es nun aus 10 Gleichungen (3 Definitionsgleichungen und 7 Verhaltensgleichungen) besteht. Endogene Variable sind das Bruttosozialprodukt Y, das verfügbare Einkommen Y^d, der private Verbrauch C, die Ausrüstungsinvestitionen I, die Bauinvestitionen BS, die Importe Q, die Geldmenge M (Geldmengendefinition M_2), der kurzfristige Zinssatz R_S, der langfristige Zinssatz R_L und der Leistungsbilanzsaldo A. Die exogenen Variablen sind: die Staatsausgaben G, die monetäre Basis B, die Exporte X und der Lombardsatz der Deutschen Bundesbank R_d.

Die Schätzung des Modells basiert auf saisonbereinigten Quartalsdaten in laufenden Preisen von 1965(1) bis 1974(4) Sie erfolgte mittels der zweistufigen Methode der Kleinsten Quadrate, wobei Autokorrelationsbereinigung 1.Ordnung durchgeführt wurde, soweit dies erforderlich war. Die t-Werte der geschätzten Parameter weisen jeweils auf eine relativ gute Absicherung der Variablen hin.

Durch Einführung von 3 Hilfsvariablen können wir das Modell als Differenzengleichungssystem 1. Ordnung schreiben. Siehe hierzu Übersicht 1.

<u>Übersicht 1: Modelldarstellung als Differenzengleichungssystem 1. Ordnung</u>

1) $Y_t = C_t + I_t + BS_t + G_t + X_t - Q_t$

2) $Y^d{}_t = 0.630\ Y_t$

3) $C_t = 5.435 + 0.558\ Y^d{}_t + 0.051\ M_t + 0.212\ C_{t-1} + u_t$

4) $I_t = 2.364 + 0.016 Y_t + 0.162\ C_{t-1} - 0.162\ E_{t-1} + 0.899\ I_{t-1} - 0.425\ F_{t-1} + u_t$

5) $BS_t = 0.888 + 0.142\ Y_t - 0.112\ Y_{t-1} + 0.842\ BS_{t-1} - 0.743\ R_{Lt} + 0.587\ R_{Lt-1} - 0.042\ H_{t-1} + u_t$

6) $Q_t = -2.388 + 0.819\ Q_{t-1} + 0.292\ Y_t - 0.239\ Y_{t-1} + u_t$

7) $R_{LT} = 0.823 + 0.019\ Y_t - 0.015\ Y_{t-1} + 0.770\ R_{Lt-1} + 0.178\ R_{St} - 0.137\ R_{St-1} + u_t$

8) $M_t = -4.465 + 0.186\ Y_t - 0.529\ R_{St} + 0.878\ M_{t-1} + u_t$

9) $R_{St} = 15.173 + 1.119\ M_t - 0.834\ M_{t-1} + 0.745\ R_{St-1} - 3.547\ B_t + 2.643\ B_{t-1} + 0.867\ R_{dt}$
$\quad -0.646\ R_{dt-1} + u_t$

10) $A_t = X_t - Q_t$

11) $E_t = C_{t-1}$

12) $F_t = R_{Lt-1}$

13) $H_t = BS_{t-1}$

Alle Eigenwerte des Modells sind positiv und kleiner als Eins. Der maximale Eigenwert beträgt 0.832. Somit handelt es sich um ein stabiles Modell mit monoton verlaufenden Einschwingpfaden.

Tabelle 1: Kumulierte Multiplikatoren: Auswirkungen einer dauerhaften Erhöhung von G, B um 1 Einheit auf das Bruttosozialprodukt Y und die Geldmenge M.

t	Y_t		M_t	
	G	B	G	B
0	1.237	0.438	0.145	1.230
1	1.463	0.486	0.251	1.913
2	1.527	0.683	0.317	2.313
3	1.525	0.816	0.353	2.549
4	1.495	0.893	0.369	2.686
5	1.456	0.931	0.373	2.769
6	1.415	0.945	0.371	2.815
7	1.376	0.944	0.365	2.840
8	1.341	0.935	0.358	2.853
9	1.310	0.923	0.350	2.858
10	1.283	0.909	0.343	2.860
.				
.				
.				
∞	1.142	0.809	0.298	2.838

Die dynamischen Multiplikatoren des Modells in Tabelle 1 geben Aussagen über die Wirkung von Änderungen der Staatsausgaben bzw. der Geldbasis auf das Bruttosozialprodukt und auf die Geldmenge. Die langfristigen Multiplikatoren zeigen, daß der Effekt einer dauerhaften Staatsausgabenerhöhung um eine Einheit auf das Bruttosozialprodukt größer ist (1.142) als der Effekt einer gleich großen dauerhaften Erhöhung der monetären Basis (0.809). Wird dagegen die Geldmenge als Zielvariable gewählt, so bewirkt eine permanente Erhöhung der Geldbasis um eine Einheit eine Erhöhung von 2.838 Einheiten, während eine entsprechende Erhöhung der Staatsausgaben die Geldmenge nur um 0.298 Einheiten erhöht. Aus den kumulierten Multiplikatoren folgern wir, daß sich Änderungen der Staatsausgaben jeweils schneller auf das Bruttosozialprodukt bzw. auf die Geldmenge auswirken als eine Änderung der Geldbasis. Die Beurteilung der relativen Wirksamkeit von geld- bzw. fiskalpolitischen Maßnahmen läßt sich allerdings nur dann vernünftig durchführen, wenn entsprechende Zielfunktionen als Kriterien benutzt werden. Dies ist sicherlich ein Vorteil, den der kontrolltheoretische Ansatz gegenüber der dynamischen Multiplikatoranalyse besitzt.

4. Durchführung der Sensitivitätsanalyse

4.1 Der Aufbau der Experimente

In den folgenden Abschnitten wollen wir verschiedene kontrolltheoretische Experimente durchführen, die Aufschluß über die Reagibilität der optimalen Politikregeln bezüglich Variationen in den Parametern der Zielfunktion geben sollen. Zur Berechnung dient das Programm von Butters und Chow (1977).

Grundlegend für die Sensitivitätsanalyse sind bestimmte Annahmen über die Zielfunktion, die bei den jeweiligen Experimenten variiert werden. Als Zielfunktion verwenden wir hier die quadratische Verlustfunktion, da sie ohne große Schwierigkeiten zu einer optimalen Lösung des Entscheidungsproblems führt und da sie als Taylorreihenapproximation zweiter Ordnung für eine allgemeinere Zielfunktion aufgefaßt werden kann. Zu Beginn des Entscheidungsprozesses muß der Entscheidungsträger seine Ziel- und Instrumentvariablen auswählen, die in der Zielfunktion mit positiven Gewichten entsprechend seiner Präferenzordnung versehen werden sollen. Die restlichen Zustandsvariablen, die für den Entscheidungsträger nicht unmittelbar interessant sind, werden mit Gewichten von Null bewertet. Ihr Sollpfad kann deshalb auch beliebig verlaufen, er hat keinen Einfluß auf das Optimierungskalkül. Die Werte der echt exogenen Variablen seien bekannt, sie folgen ihren historischen Werten. Da die Variation von Instrumentvariablen Kosten verursacht und gewissen Restriktionen unterliegt, werden die Instrumente in der Zielfunktion mit positiven Gewichten bewertet. Weiterhin garantiert die Instrumentenbewertung die Eindeutigkeit der optimalen Lösung, wenn die Anzahl der Instrumentvariablen größer ist als die der Zielvariablen. In unseren Experimenten wählen wir die Staatsausgaben G und die monetäre Basis B als Instrumentvariablen, um so die unterschiedlichen Effekte fiskal- und geldpolitischer Maßnahmen auf den optimalen Zustandsverlauf untersuchen zu können. Der Instrumenteneinsatz soll hier auf die endogenen Variablen Bruttosozialprodukt Y, Geldmenge M und Leistungsbilanzsaldo A gerichtet sein; d.h. daß im Rahmen der unterstellten Modellökonomie Fragen eines stetigen und angemessenen Wachstums, eines außenwirtschaftlichen Gleichgewichts und einer angemessenen Geldversorgung der Wirtschaft behandelt

werden. Eine explizite Berücksichtigung von Inflation und Arbeitslosigkeit läßt sich nicht durchführen[1], da das verwendete Modell nicht die güterwirtschaftliche Angebotsseite berücksichtigt. Alle übrigen Zustandsvariablen sollen im folgenden nicht bewertet werden. Eine weitere wichtige Komponente der Zielfunktion (Verlustfunktion) ist die Festlegung der Sollpfade (Zielpfade) für die bewerteten Zustandsvariablen. Die Sollpfade der Zielvariablen repräsentieren die vom politischen Entscheidungsträger gewünschten Zeitpfade der Variablen. Für die gewünschten Sollpfade der Ziel- und Instrumentvariablen unterstellen wir, daß sie sich mit konstanten Wachstumsraten entwickeln. Als Anfangsperiode für die Optimierung wählen wir das 4. Quartal 1971, d. h. die Werte aller Variablen sind für diese Startperiode bekannt. Es sind die historischen Werte bis auf den Anfangswert von A im Zielpfad 1, da hier für die gesamte Planungsperiode eine ausgeglichene Leistungsbilanz unterstellt wird. Im folgenden unterscheiden wir zwei Zielpfade.

Übersicht 2: Vierteljährliche Wachstumsraten der Zielpfade für die Ziel- und Instrumentvariablen.

	Y	M	A	G	B
Zielpfad 1 Zielpfad 2	2 % 3 %	4 % 3 %	0 % -50 %	4 % 3 %	2,5 % 3 %
Anfangswerte 4. Quartal 71 (Mrd. DM)	194.5	190.8	0/2.4	33.8	77.8

1) Für eine kontrolltheoretische Behandlung des trade-offs zwischen Inflation und Arbeitslosigkeit siehe z.B. Franz, Kempf und Kräger (1984), sowie Franz und Kräger (1980).

Der Zielpfad 1 orientiert sich mit Ausnahme des Leistungsbilanzsaldos an der historischen Entwicklung der Variablen für den Zeitraum 71 (1) - 74 (4). Die gewählten Wachstumsraten entsprechen in etwa den Mittelwerten der beobachteten Wachstumsraten. Hierdurch versuchen wir, eine verstetigende Entwicklung der Ziel- und Instrumentvariablen im Vergleich zu den Modellprognosen zu erreichen. Der Zielpfad 2 ist so gewählt, daß der in 71 (4) herrschende Anteil der Staatsausgaben am Bruttosozialprodukt sowie der Anteil der monetären Basis an der Geldmenge (Geldmengenmultiplikator) im Zeitablauf konstant bleibt und zusätzlich ein sukzessiver Abbau des in der Startperiode existierenden Leistungsbilanzüberschusses erfolgt.

Die adäquate Gewichtung der Zielvariablen in der Zielfunktion ist sehr schwierig, da sie die Präferenzvorstellungen des Wirtschaftspolitikers widerspiegeln soll [1]. Hierbei ist zu beachten, daß die entstehenden Kosten, die als quadrierte Abweichungen der Optimalpfade von den Zielpfaden dargestellt sind, von den Dimensionierungen der Variablen und den vorgegebenen Gewichten abhängig sind. Zur Festlegung der Präferenzordnung ist der Zielerreichungsgrad für die in das Entscheidungskalkül einbezogenen Variablen entscheidend. Es ist also für jede Variable ihre Anpassung an den vorgegebenen Zielpfad zu beurteilen und diese Anpassungen sind für die einzelnen Variablen miteinander zu vergleichen. Um diese Vergleichbarkeit zu gewährleisten, verwenden wir im folgenden als Gütemaß zur Beurteilung der Anpassung für jede bewertete Variable die Wurzel der mitt-

---

1) Es wird z. B. versucht, die Gewichte so zu wählen, daß "äquivalente Abweichungen" (siehe Gruber (1980)) oder gleiche prozentuale Abweichungen der Optimalpfade von den Zielpfaden (Kuhbier (1980)) gleiche Verluste ergeben. Man könnte auch versuchen, die Gewichte so zu wählen, daß alle Zielvariablen den gleichen Anteil zur Verlustfunktion beisteuern (Kuhbier (1981)).

leren quadrierten prozentualen Abweichung zwischen dem Optimalpfad y_t und dem zugehörigen Zielpfad a_t.

Somit gilt, mit T als Planungshorizont:

(17) $$U_1^T(y) := \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{y_t - a_t}{a_t} \cdot 100 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Nur für den Fall, daß der Zielpfad a_t Nullen enthält, messen wir die Güte der Anpassung durch die Wurzel der mittleren quadrierten Abweichung zwischen Optimal- und Sollpfad:

(18) $$U_0^T(y) := \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} (y_t - a_t)^2 \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Ein Vergleich der numerischen Werte gleicher Anpassungsmaße legt die Präferenzordnung bezüglich der Zielerreichung fest, wobei bei vollständiger dynamischer Kontrollierbarkeit bestimmter Variablen deren U-Werte verschwinden.

Als Basislauf (1) bezeichnen wir im folgenden den Optimierungslauf, der bei einer Gleichgewichtung aller Ziel- und Instrumentvariablen und Konstanz der Gewichte in allen Perioden einen Optimierungszeitraum von 5 Perioden sowie den Zielpfad 1 verwendet. Alternative Optimierungsläufe erhalten wir durch Variation von Parametern in der Zielfunktion, wobei als unveränderbare Rahmenbedingung das ökonometrische Modell vorgegeben ist, das den Entscheidungsgremien mit Sicherheit bekannt sei. Die geschätzten Struk-

turparameter werden daher als feste Größen behandelt und die Restgrößen in den Strukturgleichungen auf ihren Erwartungwert von Null gesetzt. [1)]

4.2 Experiment 1: Variation des Planungshorizontes

Eine wichtige Komponente der Zielfunktion ist der Planungshorizont, d. h. der Zeitraum, über den optimiert werden soll. In diesem ersten Experiment wollen wir untersuchen, wie sensitiv die optimalen Verläufe der Ziel- und Instrumentvariablen bezüglich einer Variation des Planungshorizontes sind. Ausgangspunkt der Analyse ist der Basislauf (1), der Optimierungszeitraum beträgt hier 5 Perioden. In allen Läufen wählen wir die gleiche Anfangsperiode 71 (4), d. h. die erste Periode, für die optimale Feedback-Regeln abgeleitet werden, ist 72 (1). Die Optimierungsläufe (2) und (3) unterscheiden sich vom Basislauf durch die Länge des Planungshorizontes. Lauf (2) erstreckt sich über 9 Perioden (bis 74 (1)), während Lauf (3) über 13 Perioden (bis 75 (1)) geht. Die U-Werte haben wir für den Lauf (2) auch für die ersten fünf Perioden (U^5) bzw. für Lauf (3) für die ersten fünf und neun Perioden (U^5 und U^9) getrennt berechnet, um die Anpassung für gleiche Zeiträume vergleichen zu können. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

In den Schaubildern I(a) bis (e) sind für die Zielvariablen Y, M, A und für die Instrumentvariablen G und B ihre jeweiligen Optimalpfade (1), (2), (3) zusammen mit ihren vorgegebenen Zielpfaden und ihren Prognosewerten gezeichnet.

---

1) Die Vernachlässigung des Einflusses der Residuen im linear-quadratischen Optimierungsansatz läßt sich mit dem certainty-equivalence Prinzip begründen.

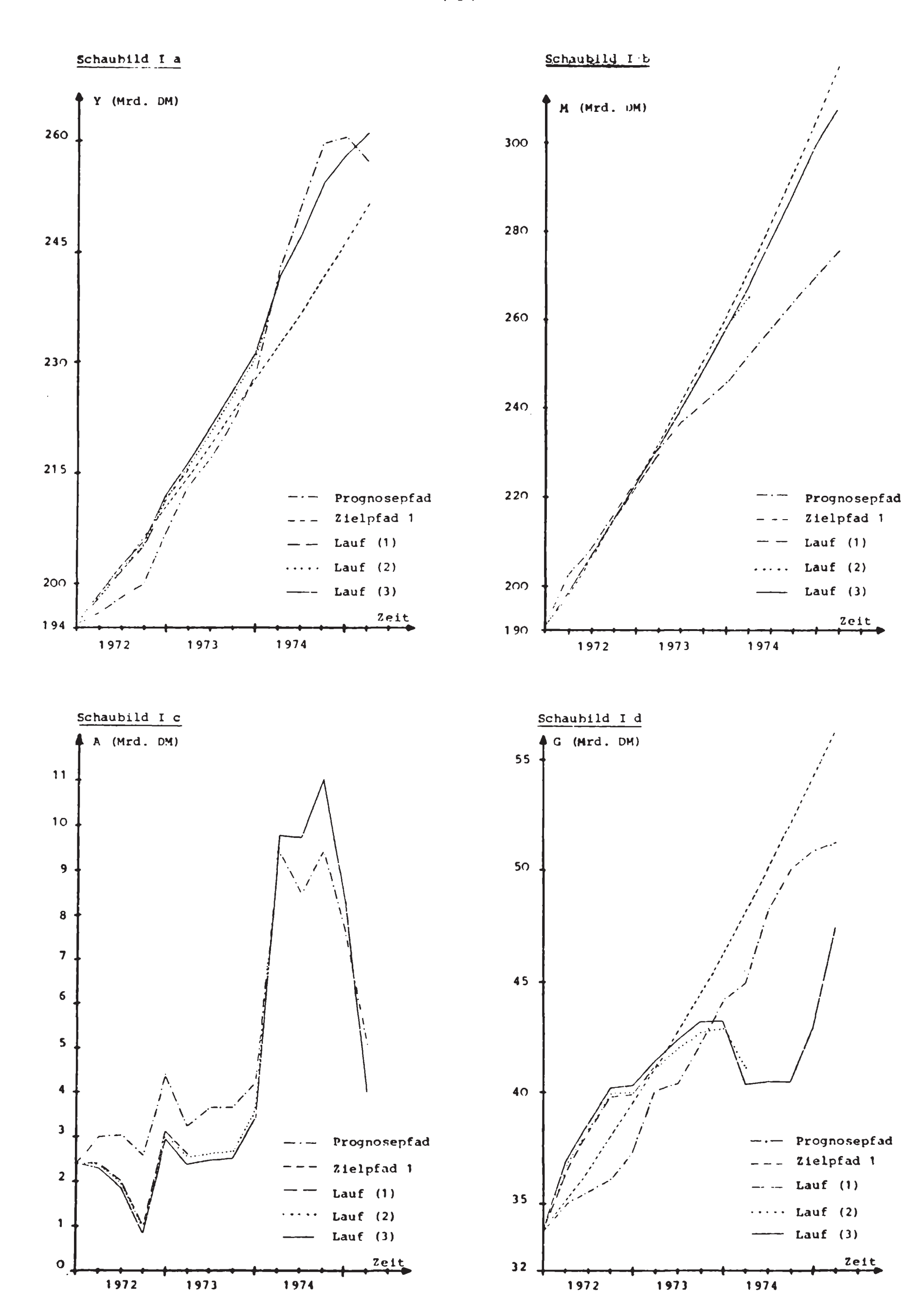
Vergleichen wir die optimalen Verläufe der Ziel- und Instrumentvariablen in (1), (2) und (3) bis zur 5. Periode bzw. in (2) und (3) bis zur 9. Periode, dann sehen wir, daß die entsprechenden Optimalpfade jeweils nur geringfügig voneinander abweichen, sowohl was die zeitliche Entwicklung als auch die entsprechenden U^5 - bzw. U^9-Werte betrifft. Für das Bruttosozialprodukt Y einerseits sowie die Geldmenge M und den Leistungsbilanzsaldo andererseits zeigt sich dabei eine gegenläufige Entwicklung bezüglich der Anpassung an die vorgegebenen Sollpfade für die ersten fünf Perioden. Während diese Anpsassung für M und A mit zunehmendem Planungshorizont besser wird, verschlechtert sie sich für Y.

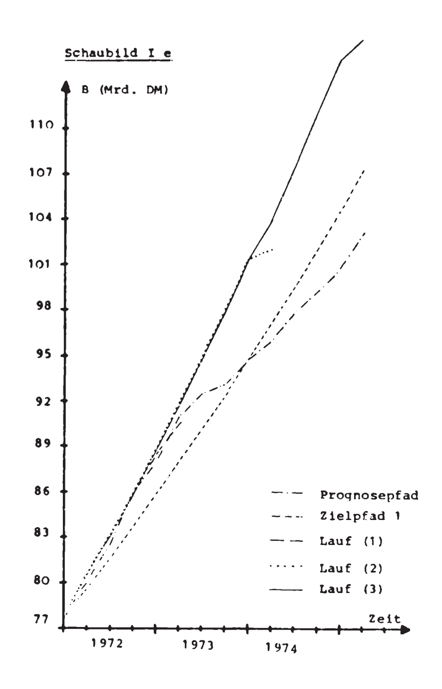
Tabelle 2: Auswirkungen alternativer Planungshorizonte bei konstanter Gewichtung im Zeitablauf und Vorgabe von Zielpfad 1.

Lauf	1 (T = 5)		2 (T = 9)			3 (T = 13)			
Variable	U^5	Gewichte	U^9	U^5	Gewichte	U^{13}	U^9	U^5	Gewichte
Y	0.367	1	1.506	0.394	1	2.790	1.550	0.492	1
M	0.470	1	0.952	0.237	1	1.406	0.784	0.231	1
A*)	2.345	1	4.023	2.293	1	5.835	3.973	2.185	1
G	3,566	1	6.275	3.801	1	12.236	6.767	4.393	1
B	2.356	1	4.330	2.700	1	6.070	4.543	2.668	1

*)Hier wurde U_0 benutzt.

Betrachten wir die gesamte Entwicklung der Optimalpfade in (1), (2) und (3), so stellen wir fest, daß die durchschnittlichen Abweichungen der Optimalpfade von den jewei-


Schaubild I a
Y (Mrd. DM)
260
245
230
215
200
194
Prognosepfad
Zielpfad 1
Lauf (1)
Lauf (2)
Lauf (3)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild I b
M (Mrd. DM)
300
280
260
240
220
200
190
Prognosepfad
Zielpfad 1
Lauf (1)
Lauf (2)
Lauf (3)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild I c
A (Mrd. DM)
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Prognosepfad
Zielpfad 1
Lauf (1)
Lauf (2)
Lauf (3)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild I d
G (Mrd. DM)
55
50
45
40
35
32
Prognosepfad
Zielpfad 1
Lauf (1)
Lauf (2)
Lauf (3)
Zeit
1972
1973
1974



ligen Zielpfaden mit zunehmendem Planungshorizont im Zeitablauf monoton größer werden. Die U^{13}-Werte in (3) haben sich im Vergleich zu den U^{5}-Werten in (1) und zu den U^{9}-Werten in (2) wesentlich erhöht. Auch hier zeigt sich, daß mit zunehmendem Planungshorizont die Anpassungen für das Bruttosozialprodukt Y im Mittel wesentlich schlechter werden als für die Geldmenge M und den Leistungsbilanzsaldo A.

Weiterhin ist festzustellen, daß kurzfristig (bei einem Planungshorizont von 5 Perioden) das Bruttosozialprodukt besser gesteuert wird als die Geldmenge, während längerfristig (bei Planungshorizonten von 9 und 13 Perioden) die Geldmenge besser kontrollierbar ist als das Bruttosozialprodukt.

4.3 Experiment 2: Alternative Zeitpräferenzen

Die Konstanz der Gewichtung aller Ziel- und Instrumentvariablen über den gesamten Planungszeitraum (wie in Experiment 1) entspricht einer gleichbleibenden, zeitlich invarianten Präferenzstruktur des Entscheidungsträgers. In vielen Fällen ist es aber sicherlich realistischer, gewisse Zeitpräferenzen hinsichtlich der Zielerreichung zu unterstellen. Deshalb wollen wir im folgenden das Verhalten der Optimalpfade bezüglich einer Diskontierung der Gewichte analysieren. Die Optimierungsläufe in diesem Experiment sind so gewählt, daß jede Ziel- und Instrumentvariable in jeder Periode das gleiche Gewicht besitzt. Die Diskontierung der Gewichte g_t im Zeitablauf formulieren wir in konstanten Wachstumsraten, d. h. die zeitliche Entwicklung ist gegeben durch $g_t = \alpha(1 + \beta)^t$, $t = 1,2,...,T$. Bei vorgegebener Wachstumsrate β wählen wir α so , daß $g_1 = 1$ ist. Der Optimierungszeitraum beträgt 13 Perioden. Als vorgegebener Sollpfad wird der Zielpfad 1 unterstellt. Tabelle 3 zeigt in den Läufen (4) bis (8) die Ergebnisse für Wachstumsraten der Gewichte von 10 %, 20 %, 50 %, 100 % und von -50 %. In den Schaubildern II (a) bis (e) sind für jede Ziel- und Instrumentvariable neben dem jeweiligen vorgebenen Zielpfad die Optimalpfade für die Läufe (3), (6) und (8) dargestellt.

Betrachten wir zunächst die Optimierungsläufe mit

Tabelle 3 : Auswirkungen alternativer Diskontierungen der Gewichte im Zeitablauf bei einem Planungshorizont von T = 13 Perioden, Vorgabe von Zielpfad 1 und Gleichgewichtung in jeder Periode.

Lauf	4			5			6			7			8		
Variable	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}
Y	2.806	1.621	0.679	2.867	1.802	1.148	5.390	5.841	7.395	44.030	52.873	70.850	2.812	1.500	0.394
M	1.350	0.738	0.204	1.297	0.698	0.208	1.214	0.766	0.732	3.662	4.301	5.730	1.731	1.071	0.479
A*)	5.813	3.908	2.026	5.777	3.805	1.737	5.934	4.003	2.656	25.465	29.916	39.819	5.843	4.047	2.356
G	11.775	7.119	5.403	12.818	8.034	7.501	23.995	25.374	33.223	187.30	224.99	301.19	11.685	6.322	3.575
B	6.132	4.580	2.686	6.185	4.597	2.669	6.288	4.497	2.184	8.718	8.056	8.687	5.701	4.219	2.425
Wachstumsrate der Gewichte	0.1			0,2			0,5			1,0			-0,5		

*) Hier wurde U_o benutzt.

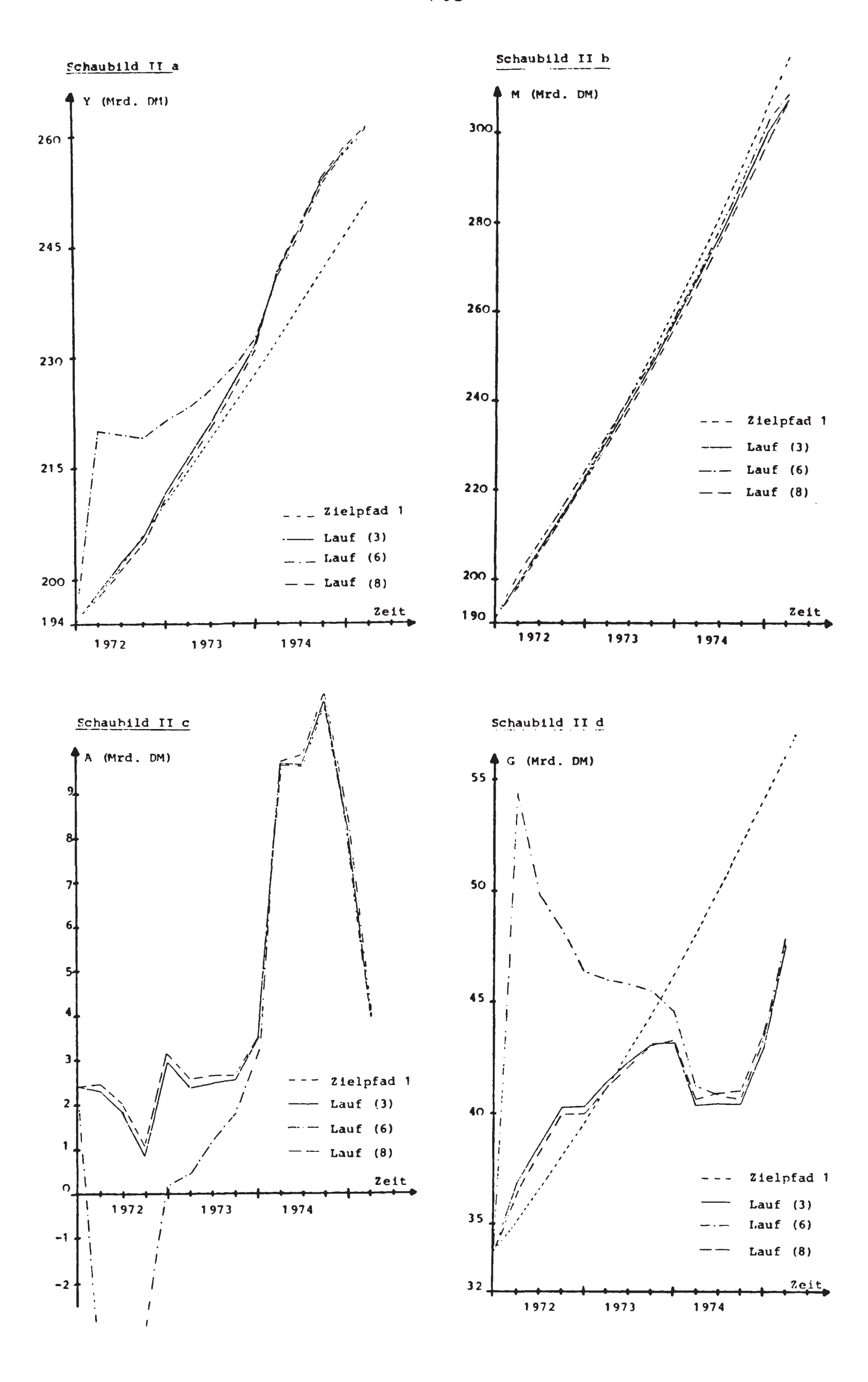
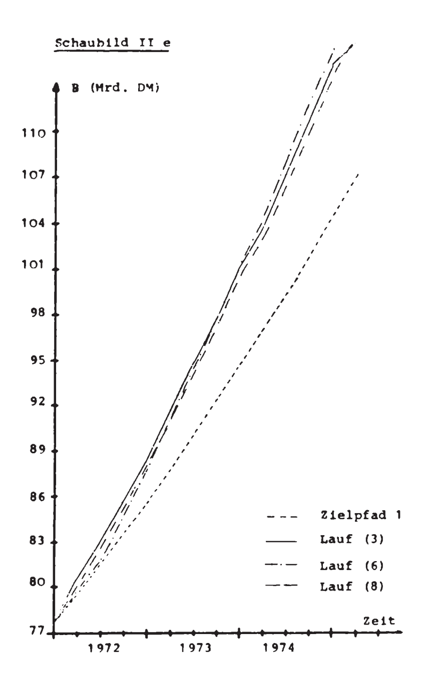


Schaubild II a
Y (Mrd. DM)
260
245
230
215
200
194
1972
1973
1974
Zeit
Zielpfad 1
Lauf (3)
Lauf (6)
Lauf (8)
Schaubild II b
M (Mrd. DM)
300
280
260
240
220
200
190
1972
1973
1974
Zeit
Zielpfad 1
Lauf (3)
Lauf (6)
Lauf (8)
Schaubild II c
A (Mrd. DM)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
1972
1973
1974
Zeit
Zielpfad 1
Lauf (3)
Lauf (6)
Lauf (8)
Schaubild II d
G (Mrd. DM)
55
50
45
40
35
32
1972
1973
1974
Zeit
Zielpfad 1
Lauf (3)
Lauf (6)
Lauf (8)



zunehmenden Gewichtungen (4) bis (7), so sehen wir, daß mit steigendem Diskontierungsfaktor die U-Werte im allgemeinen ebenfalls zunehmen. Dies resultiert aus einer schlechter werdenden Anpassung in den ersten Perioden, wie aus den U^5- bzw. U^9-Werten in Tabelle 3 sowie den Schaubildern II deutlich wird. Insbesondere die Variablen G, Y und A reagieren sehr sensitiv in den ersten Perioden auf eine Vergrößerung der Wachstumsraten für die Gewichte. Es treten sehr große Schwankungen in ihren Optimalpfaden auf. Dagegen ergibt sich für die Geldmenge M und die monetäre Basis B eine sehr geringe Sensitivität bezüglich alternativer Diskontierungen der Gewichtspfade.

Die Ergebnisse in Tabelle 3 zeigen außerdem, daß die Optimalpfade auf relativ kleine Wachstumsraten der Gewichte (im Beispiel bis 20 %) nur sehr schwach reagieren; erst bei großen Wachstumsraten sind die Veränderungen der optimalen Lösungen erheblich.

Aus den Resultaten des Optimierungslaufs (8) sehen wir dagegen, daß die Sensitivität der Optimalpfade hinsichtlich einer abnehmenden Gewichtung wesentlich geringer ist. Diesen Lauf können wir direkt mit Lauf (6) vergleichen, da die gleichen absoluten Wachstumsraten gewählt wurden.

Während die Optimalpfade von Lauf (6) teilweise sehr stark schwanken, verlaufen die Optimalpfade von (8) über den gesamten Planungszeitraum fast parallel zum Lauf (3). Die minimale Bewertung der letzten Perioden (im Vergleich zum Lauf (3)) hat kaum Auswirkungen auf die Optimalpfade.

4.4 Experiment 3: Variation des Zielpfades

Im folgenden wiederholen wir die ersten beiden Experimente für den Zielpfad 2, um festzustellen, ob die generellen Aussagen bezüglich des Einflusses des Planungshorizontes und der Zeitpräferenz vom gewählten Zielpfad abhängen.

Tabelle 4 und die Schaubilder III (a) bis (e) zeigen den Einfluß alternativer Planungshorizonte auf. Wir erhalten im Prinzip dieselben Resultate wie beim Experiment 1:

Die Optimalpfade der Zielvariablen weichen in den Läufen (9), (10) und (11), über 5 Perioden gesehen, (bzw. in den Läufen (10) und (11) über 9 Perioden) kaum voneinander ab. Die Veränderungen in den U-Werten sind für vergleichbare Zeiträume sehr gering, während mit zunehmendem Zeithorizont die Abweichungen der Optimalpfade von den vorgegebenen Zielpfaden immer größer werden.

Die Ergebnisse für das Experiment 2 mit Zielpfad 2 sind in Tabelle 5 und den Schaubildern IV (a) bis (e) zusammengefaßt. Im wesentlichen können wir dieselben Schlußfolgerungen ziehen wie beim entsprechenden Experiment mit Zielpfad 1:

Die Optimierungsläufe (12) und (13) (mit zunehmenden Gewichten im Zeitablauf) zeigen, daß mit steigender Wachstumsrate die Anpassungen der Optimalpfade an die Zielpfade im Mittel schlechter werden. Dies wird durch stärkere Abweichungen der Variablen von ihren Sollwerten in den ersten Perioden verursacht.

Bei abnehmender Gewichtung (Lauf 14) entwickelt sich der jeweilige Optimalpfad fast parallel zu Lauf (11), der keine Zeitpräferenz unterstellt. Es treten in (14) keine Schwankungen wie bei den Läufen (12) und (13) auf.

Tabelle 4: Auswirkungen alternativer Planungshorizonte bei konstanter Gewichtung im Zeitablauf und Vorgabe von Zielpfad 2.

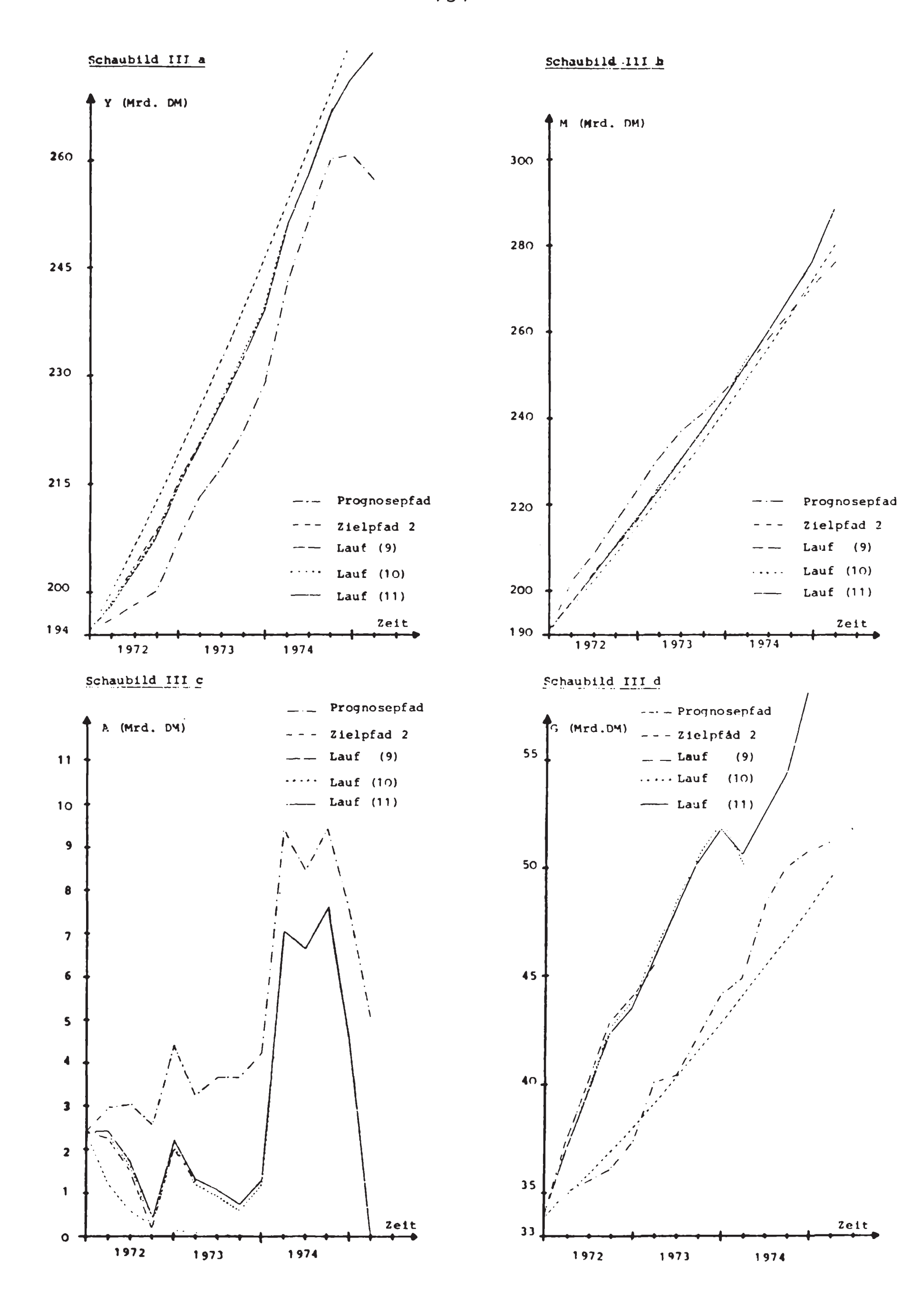
Lauf	9 (T = 5)		10 (T = 9)			11 (T = 13)			
Variable	U^5	Gewichte	U^9	U^5	Gewichte	U^{13}	U^9	U^5	Gewichte
Y	1.726	1	2.086	1.806	1	2.293	2.234	1.964	1
M	0.950	1	1.209	0.898	1	1.455	1.102	0.886	1
A*)	1.179	1	2.582	1.219	1	3.756	2.619	1.307	1
G	13.985	1	16.596	13.794	1	17.347	16.091	13.147	1
B	1.966	1	2.921	2.052	1	4.172	3.116	2.026	1

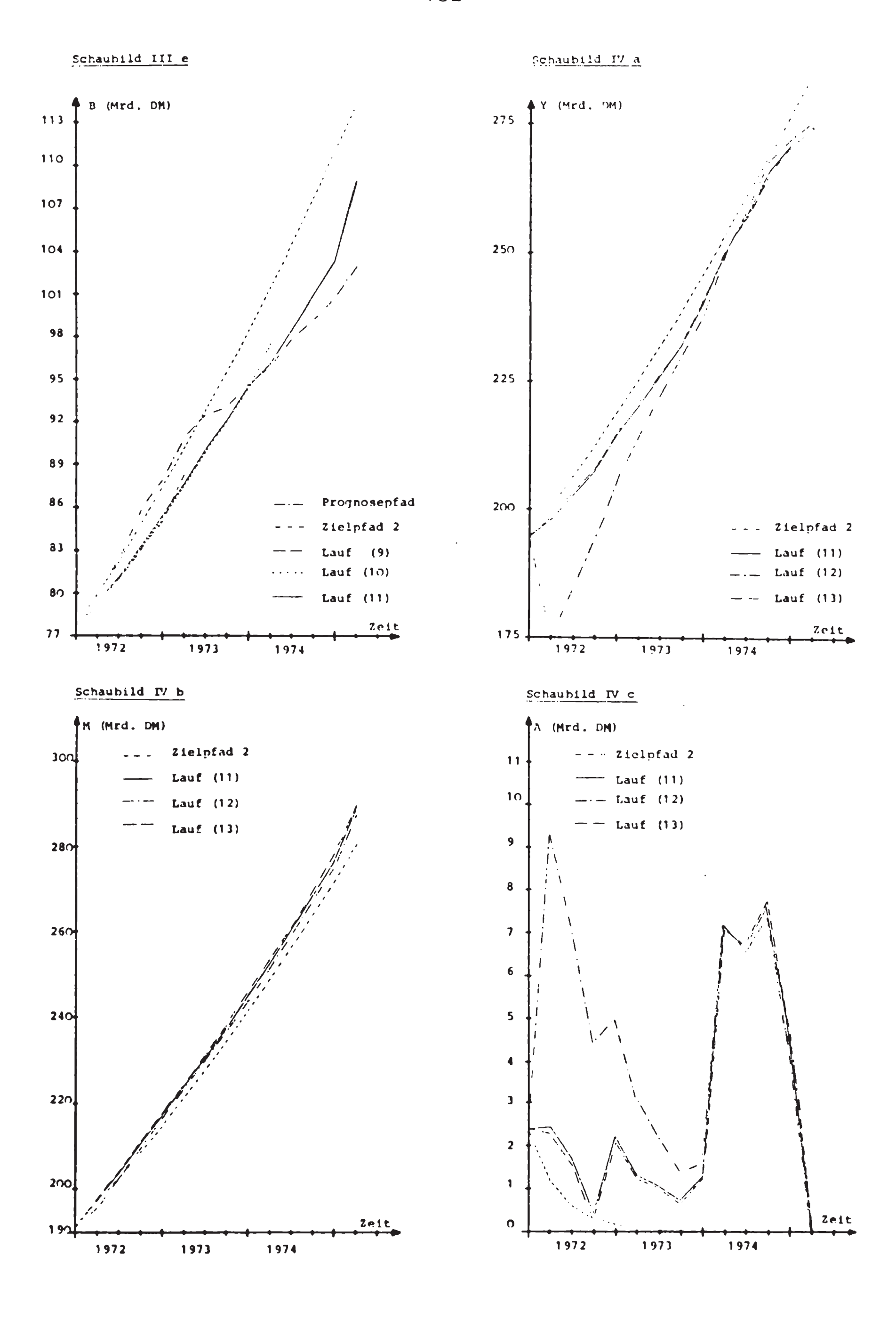
*) Hier wurde $U_{ü}$ benutzt.

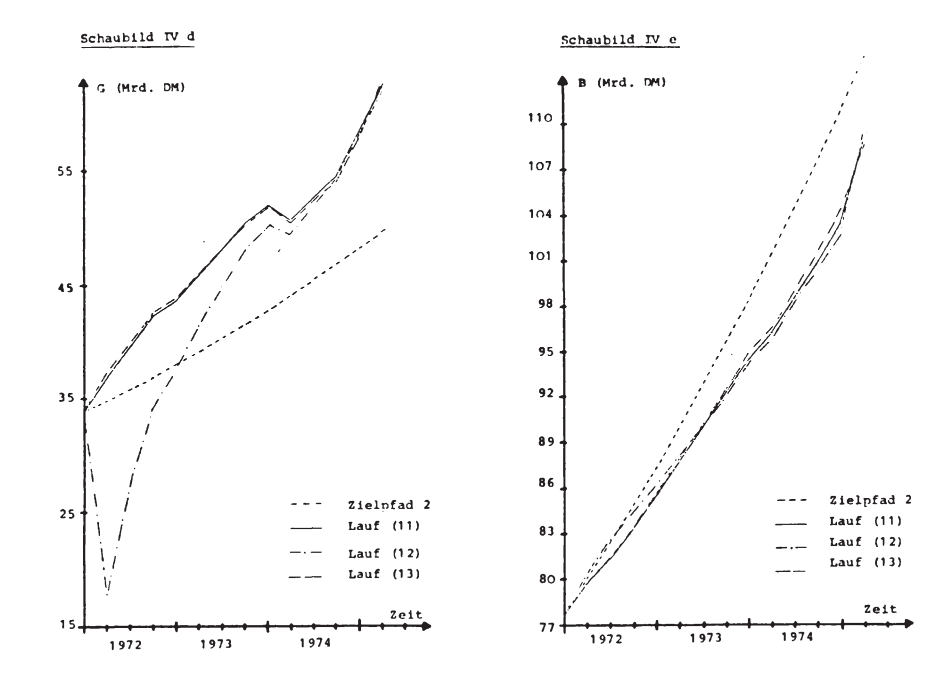
Tabelle 5: Auswirkungen alternativer Diskontierungen der Gewichte im Zeitablauf bei einem Planungshorizont von T = 13 Perioden, Vorgabe von Zielpfad 2 und Gleichgewichtung in jeder Periode.

Lauf	12			13			14		
Variable	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}	U^{13}	U^{9}	U^{5}
Y	6.091	7.169	9.127	47.632	57.239	76.672	2.232	2.113	1.770
M	1.184	0.806	0.611	3.143	3.676	4.914	1.719	1.337	1.017
A*)	5.037	4.893	5.582	28.918	34.620	46.301	3.765	2.579	1.198
G	20.112	20.596	24.620	198.800	238.800	320.230	17.271	16.306	13.762
B	4.280	2.995	1.272	8.089	8.525	10.439	3.897	2.868	1.915
Wachstumsrate der Gewichte	0,5			1,0			-0,5		

*) Hier wurde U_o benutzt.


Schaubild III a
Y (Mrd. DM)
260
245
230
215
200
194
Prognosepfad
Zielpfad 2
Lauf (9)
Lauf (10)
Lauf (11)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild III b
M (Mrd. DM)
300
280
260
240
220
200
190
Prognosepfad
Zielpfad 2
Lauf (9)
Lauf (10)
Lauf (11)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild III c
A (Mrd. DM)
Prognosepfad
Zielpfad 2
Lauf (9)
Lauf (10)
Lauf (11)
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild III d
G (Mrd.DM)
Prognosepfad
Zielpfad 2
Lauf (9)
Lauf (10)
Lauf (11)
55
50
45
40
35
33
Zeit
1972
1973
1974


Schaubild III e
B (Mrd. DM)
113
110
107
104
101
98
95
92
89
86
83
80
77
Prognosepfad
Zielpfad 2
Lauf (9)
Lauf (10)
Lauf (11)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild IV a
Y (Mrd. DM)
275
250
225
200
175
Zielpfad 2
Lauf (11)
Lauf (12)
Lauf (13)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild IV b
M (Mrd. DM)
300
280
260
240
220
200
Zielpfad 2
Lauf (11)
Lauf (12)
Lauf (13)
Zeit
1972
1973
1974
Schaubild IV c
A (Mrd. DM)
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Zielpfad 2
Lauf (11)
Lauf (12)
Lauf (13)
Zeit
1972
1973
1974



Somit sind für die hier durchgeführten Experimente die generellen Aussagen hinsichtlich der Variation des Planungshorizontes und hinsichtlich der zeitlichen Diskontierung der Gewichte weitgehend unabhängig von der Wahl der Zielpfade.

Ein Vergleich der Läufe (1), (2) und (3) mit den jeweils entsprechenden Läufen (9), (10) und (11) für den Zielpfad 2 verdeutlicht die Sensitivität der Optimalpfade hinsichtlich einer Veränderung der Zielpfade. Es ergeben sich teilweise beträchtliche Unterschiede im gesamten Verlauf

der entsprechenden Optimalpfade, als auch in der Güte bezüglich der Anpassung an die vorgegebenen Pfade. So zeigt sich beispielsweise bei einem Planungshorizont von 5 Perioden, daß bei Vorgabe von Zielpfad 1 Y besser gesteuert werden kann als M (Lauf (1)), während bei Vorgabe von Zielpfad 2 und sonst gleichen Bedingungen M wesentlich besser gesteuert werden kann als Y (Lauf (9)).

In diesem Zusammenhang stellt sich nun die Frage, wie man die Anpassung der Zielvariablen an ihre Sollpfade verbessern kann. Eine Möglichkeit dies zu erreichen, besteht darin, anzunehmen, daß der Einsatz der Instrumentvariablen (fast) kostenlos ist. Die Instrumentvariablen werden hier im Vergleich zu den Zielvariablen nur minimal bewertet. Die Verläufe der Zielpfade der Instrumentvariablen haben somit nahezu keinen Einfluß auf die Ergebnisse des Optimierungskalküls. Es sind also beliebig große Variationen der Instrumente möglich.[1] Bei Vorgabe von Zielpfad 2 zeigt sich in Tabelle 6, daß wir im Vergleich zu Lauf (9) in Lauf (15) eine wesentlich bessere Anpassung der Zielvariablen an die vorgegebenen Sollpfade erreichen. Obwohl wir drei Ziele mit nur zwei Instrumenten steuern, gelingt es, die Geldmenge M vollständig an ihren Zielpfad anzupassen. Wählen wir nur Y und M als Zielvariablen (Lauf (16)), so lassen sie sich durch die Staatsausgaben und die monetäre Basis vollständig dynamisch kontrollieren. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom vorgegebenen Zielpfad, denn die Läufe (17) und (18), bei denen der Zielpfad 1 unterstellt wird, lassen dieselben Schlußfolgerungen zu.

---

1) Die Frage der praktischen Realisierbarkeit wird dabei natürlich ausgeklammert, es werden vielmehr Fragen nach der Kontrollierbarkeit gestellt.

Tabelle 6: Anpassung der Optimalpfade an vorgegebene Zielpfade bei einem Planungshorizont von 5 Perioden.

	Zielpfad 2				Zielpfad 1			
Lauf	15		16		17		18	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.097	1	0.002	1	0.314	1	0.001	1
M	0.001	1	0.001	1	0.001	1	0.001	1
A*)	0.705	1	1.074	O	2.236	1	2.427	0
G	22.480	0.001	22.565	0.001	5.204	0.001	4.766	0.001
B	3.581	0.001	3.584	0.001	3.032	0.001	3.100	0.001

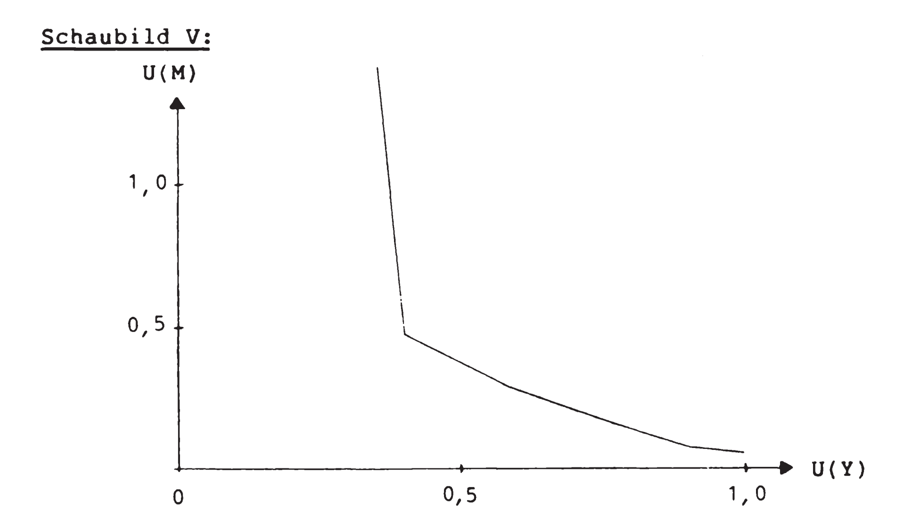
*) Hier wurde U_o benutzt.

4.5 Experiment 4: Unterschiedliche Gewichtung der Zielvariablen

Durch unterschiedliche Bewertung in der Kostenfunktion kommen die Präferenzen des Entscheidungsträgers hinsichtlich der einzelnen Ziele zum Ausdruck. Mit Hilfe kontrolltheoretischer Untersuchungen ist es möglich, die gegenseitige Beeinflussung und Abhängigkeit zweier Zielvariablen sichtbar zu machen. Die quadratische Verlustfunktion wird hier häufig zur Ermittlung substitutionaler Austauschrelationen (trade-offs) hinsichtlich der Anpassung bestimmter Zielvariablen an ihre gewünschten Pfade benutzt. Im folgenden Experiment versuchen wir, einen trade-off bezüglich der Stabilisierung des Bruttosozialprodukts und der Geldmenge zu bestimmen.

Wie im Basislauf wählen wir für dieses Experiment den Zielpfad 1, der Optimierungszeitraum beträgt 5 Perioden. Die Instrumentvariablen G und B, sowie die Zielvariable A werden in allen Perioden mit 1 gewichtet. Y und M werden unterschiedliche Gewichte zugeordnet, um so einen trade-off ermitteln zu können. Wir beginnen mit Lauf (19), in dem Y mit 1 und M mit 0 bewertet werden, d. h. die Entwicklung von M ist für den Entscheidungsträger bedeutungslos. In den folgenden Optimierungsläufen soll die Gewichtung des Bruttosozialprodukts laufend abnehmen, während die Bewertung der Geldmenge gleichermaßen zunimmt, d. h. Stabilisierung von M wird im Vergleich zur Stabilisierung von Y immer wichtiger. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 7 und in Schaubild V zusammengestellt.

Schaubild V:



Dieses Experiment zeigt sehr deutlich die Existenz eines trade-offs zwischen der Stabilisierung des Bruttosozialprodukts Y und der Geldmenge M. Ausgehend vom Basislauf (1) läßt sich eine bessere Stabilisierung der Geldmenge, d. h. eine bessere Anpassung dieser Variablen an ihren Sollpfad, nur auf Kosten einer schlechteren Stabilisierung

<u>Tabelle 7:</u> Bestimmung eines trade-offs zwischen der Stabilisierung von Y und M bei Vorgabe von Zielpfad 1 und einem Planungshorizont von 5 Perioden.

Lauf	19		1		20		21		22		23	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.315	1	0.367	1	0.548	0.5	0.713	0.25	0.835	0.125	0.984	0
M	1.722	0	0.470	1	0.270	2	0.145	4	0.074	8	0.058	10
A*)	2.441	1	2.345	1	2.303	1	2.268	1	2.245	1	2.226	1
G	3.975	1	3.566	1	3.272	1	3.102	1	3.054	1	3.094	1
B	0.800	1	2.356	1	2.628	1	2.798	1	2.891	1	2.901	1

*) Hier wurde U_o benutzt

von Y erreichen, wenn durch die vorgegebene Gewichtung für die Instrumente, diese in einen zulässigen Bereich gezwungen werden.

Aufgrund dieses trade-offs ist keine gleichzeitige, vollständige Anpassung der Variablen Y und M an ihre vorgegebenen Zielwerte möglich, solange die Instrumente nicht völlig frei variieren können. Die unterschiedliche Bewertung der Zielvariablen hat auch Einfluß auf die optimalen Verläufe der Instrumentvariablen; sie macht Abhängigkeiten zwischen Ziel- und Instrumentvariablen deutlich.

Tabelle 7 zeigt, daß die U-Werte von G bzw. B durch die Gewichtung von Y bzw. M verändert werden. Die abnehmende Bewertung von Y besagt, daß die Abweichung dieser Variablen von ihrem Zielpfad für den Entscheidungsträger immer weniger Bedeutung hat, d. h. die Steuerung von Y verursacht für den Einsatz der beeinflussenden Instrumentvariablen weniger Kosten, also muß die Instrumentvariable, die hauptsächlich auf Y wirkt, abnehmende U-Werte aufweisen, während umgekehrt die Instrumentvariable, die für die Regelung von M hauptsächlich zuständig ist, i. a. zunehmende U-Werte aufweisen wird. Somit zeigt sich die erwartete Abhängigkeit von G und Y bzw. B und M.

4.6 Experiment 5: Unterschiedliche Gewichtung der Instrumentvariablen

Durch eine unterschiedliche Bewertung der Instrumentvariablen in der Zielfunktion erhalten wir Aufschluß über die Effizienz alternativer, politischer Maßnahmen. Auf diese Weise können wir auch analysieren, welche Zielvariablen durch welche Instrumentvariablen gesteuert werden. Grundlage für dieses Experiment bildet der Zielpfad 1, sowie ein Planungszeitraum von 5 Perioden. Die einzelnen Zielvariablen haben in allen Perioden das gleiche Gewicht, d. h. es wird keine Zeitpräferenz unterstellt. Tabelle 8 enthält die entsprechenden Ergebnisse.

Wir versuchen, durch eine unterschiedliche Bewertung der geld- bzw. fiskalpolitischen Maßnahmen deren Wirkungen auf die Zielvariablen Bruttosozialprodukt und Geldmenge zu analysieren.

In den Optimierungsläufen (24) und (25) gewichten wir die Staatsausgaben mit 0, d. h. G ist an keinen Sollpfad gebunden. Die Staatsausgaben können ohne Kosten so gewählt werden, daß sie das Entscheidungsmodell optimieren. Wegen der steigenden Gewichtung für die Geldbasis läuft die Steuerung des Modells in zunehmendem Maße über G. Durch diese stärkere Anbindung von B an seinen Sollpfad zeigt sich, welchen Einfluß B auf den Optimierungsprozeß ausübt. Ein Vergleich der Läufe (24) und (25) ergibt, daß die Abweichungen der Zielvariablen Y und M von ihren gewünschten Pfaden bei zunehmender Gewichtung von B größer werden. Die U-Werte von Y verändern sich aber nur geringfügig, während die von M sehr stark ansteigen. Hieraus folgern wir, daß B vorwiegend den Optimalpfad von M steuert, aber auch einen gewissen Einfluß auf die Steuerung von Y hat.

Tabelle 8: Auswirkungen unterschiedlicher Gewichtungen der Instrumentvariablen bei Vorgabe von Zielpfad 1 und einem Planungshorizont von 5 Perioden.

Lauf	24		25		26		27		28	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.391	1	0.583	1	0.389	1	0.873	1	0.327	1
M	0.485	1	1.486	1	0.128	1	0.297	1	1.507	1
A*)	2.189	1	2.079	1	2.353	1	2.562	1	2.324	1
G	5.433	0	6.833	0	3.344	1	0.801	10	4.697	1
B	2.247	1	0.758	10	3.067	0	3.171	0	0.847	10

Lauf	29		30		31		32		1	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.313	1	0.865	1	1.033	1	0.967	1	0.367	1
M	2.041	1	0.476	1	0.483	1	1.541	1	0.470	1
A*)	2.314	1	2.612	1	2.695	1	2.765	1	2.345	1
G	5.412	1	0.878	10	0.103	100	1.238	10	3.566	1
B	0.117	100	2.547	1	2.607	1	1.002	10	2.356	1

*) Hier wurde U_o benutzt.

Um die Wirkung der Staatsausgaben auf die Zielvariablen bestimmen zu können, nehmen wir in den Läufen (26) und (27) an, daß der Einsatz der Geldbasis kostenlos sei, d.h. die Steuerung der Variablen verläuft hauptsächlich über B, während die Staatsausgaben in zunehmendem Maße an einen vorgegebenen Sollpfad angepaßt werden. Die U-Werte der Zielvariablen zeigen deutlich, daß G sowohl Y als auch M stark beeinflußt. In den Läufen (1), (28) und (29) wird die Bewertung von G konstant gleich Eins gehalten, während die Gewichtung von B stark variiert. Es ergibt sich hinsichtlich der Wirksamkeit der Instrumente, daß mit zunehmenden Kosten für B die Anpassungen von M schlechter werden. Die Staatsausgaben übernehmen in diesen Läufen im Vergleich zur monetären Basis einen immer größer werdenden Anteil der Systemsteuerung, da sie, relativ zu B, weniger an ihren Sollpfad gebunden sind. Dies hat auch Auswirkungen auf Y, die U-Werte von Y nehmen ab, d. h. die Stabilisierung von Y wird wegen des relativ billigeren Einsatzes von G besser. In den Läufen (1), (30) und (31) bleibt die Bewertung von B konstant, während die Gewichtung von G sukzessive erhöht wird. Dies hat folgenden Effekt auf die Zielvariablen: Das Bruttosozialprodukt Y läßt sich schlechter stabilisieren, da G mit zunehmender Gewichtung immer mehr an seinen Sollpfad gebunden wird und so seinen Einfluß auf die Steuerung der Zielvariablen Y und M verliert. Die U-Werte von M bleiben in etwa gleich. Obwohl die Steuerung des Modells mehr und mehr von B übernommen wird, erhalten wir trotz des relativ kostengünstigeren Einsatzes von B keine Verbesserung in den U-Werten von M.

Werden die Instrumentvariablen im Vergleich zu den Zielvariablen wesentlich höher bewertet (vgl. Lauf (32)), dann unterliegen die eingesetzten Politiken strengeren Restriktionen, d. h. für ihre optimalen Werte wird der zulässige

Bereich eingeschränkt. Die Steuerung der Zielvariablen wird hier im Vergleich zum Basislauf erschwert.

Zusammenfassend können wir aufgrund dieses Experiments folgern, daß die monetäre Basis hauptsächlich zur Stabilisierung der Geldmenge geeignet ist, während die Staatsausgaben, obwohl sie primär das Bruttosozialprodukt stabilisieren, ebenfalls die Geldmenge steuern.

4.7 Experiment 6: Stabilisierung mit nur einem Instrument

Unsere kontrolltheoretischen Untersuchungen basierten bisher immer auf der Annahme, daß zwei Instrumentvariable (Staatsausgaben und Geldbasis) zur Steuerung bestimmter Zielvariablen eingesetzt werden. Dies läßt sich als kooperatives Verhalten der Entscheidungsträger Staat und Bundesbank bei ihren wirtschaftspolitischen Maßnahmen interpretieren. Im folgenden wollen wir diese Annahme über das Verhalten der Entscheidungsträger aufheben; stattdessen wollen wir untersuchen, welches Instrument zur Stabilisierung der Zielvariablen besser geeignet ist, wenn das jeweils andere Instrument dem Einflußbereich des Entscheidungsträgers entzogen ist, d. h. es wird im Optimierungsansatz als echt exogene Variable behandelt und folgt damit seinen historischen Werten.

In Tabelle 9 beträgt der Optimierungszeitraum 5 Perioden, die Abweichungen der Zielvariablen und des jeweiligen Instruments werden vom Zielpfad 1 gemessen und die Zielvariablen Y, M und A werden in jeder Periode konstant mit Eins bewertet. Für die jeweils eingesetzten Instrumentvariablen wird angenommen, daß ihre Variation mit gewissen Kosten verbunden ist (Lauf (33) und (35)) als auch, daß ihr

Einsatz nahezu kostenlos erfolgen kann (Lauf (34) und (36)).
Bei einem Vergleich der Läufe (33) und (34) bzw. (35) und (36) wird die aufgrund des vorherigen Experiments festgestellte Zuordnung von Instrumentvariablen zu Zielvariablen nicht unmittelbar bestätigt. Bei Vorliegen von drei Zielen und nur einem Instrument ist es schwierig, eindeutige Ziel-Mittel-Kombinationen zu finden.

Um die Analyse zu vereinfachen, sollen bei sonst gleichen Bedingungen in den folgenden Optimierungsläufen nur noch die beiden Variablen Bruttosozialprodukt und Geldmenge stabilisiert werden.

Aus einem Vergleich der Läufe (37) bis (40) in Tabelle 10 folgt, daß die Staatsausgaben allein in der Lage sind, das Bruttosozialprodukt in sehr großem Ausmaß zu stabilisieren. Ein fast kostenloser Einsatz von G verbessert die U-Werte von Y erheblich bei einer gleichzeitigen geringfügigen Verbesserung der U-Werte von M. Bei alleiniger Geldpolitik bewirkt eine nahezu kostenlose Einsatzmöglichkeit der monetären Basis bei beiden Zielen nur eine geringfügige Verbesserung der Anpassung an die gewünschten Pfade. Weiterhin zeigt sich, daß die Fiskalpolitik auf das Bruttosozialprodukt wesentlich stärker wirkt als die Geldpolitik, da die U-Werte von Y in den Läufen (37) und (38) viel niedriger liegen als in den Läufen (39) und (40). Die Steuerung der Geldmenge durch den Einsatz der monetären Basis ist dagegen nur minimal besser als durch den Einsatz der Staatsausgaben. Somit läßt sich in der hier vorliegenden Modellökonomie mit alleiniger Staatsausgabenpolitik insgesamt gesehen eine bessere Stabilisierung erreichen als mit alleiniger Geldpolitik.

Tabelle 9: Stabilisierung von drei Zielen mit jeweils einem Instrument bei Vorgabe von Zielpfad 1 und einem Planungshorizont von 5 Perioden.

Lauf	33		34		35		36	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.357	1	0.397	1	1.688	1	1.602	1
M	0.532	1	0.477	1	0.485	1	0.561	1
A*)	2.346	1	2.185	1	3.180	1	3.096	1
G	3.883	1	5.549	0.001	-------	--	-------	-
B	--------	-	-------	-	3.050	1	3.718	0.001

*) Hier wurde U_o benutzt.

Tabelle 10: Stabilisierung von zwei Zielen mit jeweils einem Instrument bei Vorgabe von Zielpfad 1 und einem Planungshorizont von 5 Perioden.

Lauf	37		38		39		40	
Variable	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte	U^5	Gewichte
Y	0.366	1	0.103	1	1.715	1	1.631	1
M	0.569	1	0.525	1	0.473	1	0.459	1
A*)	2.476	0	2.367	0	3.200	0	3.120	0
G	3.347	1	4.971	0.001	--------	-	--------	..
B	--------	-	--------	-	2.994	1	3.603	0.001

*) Hier wurde U_o benutzt.

5. Zusammenfassung

Durch die Anwendung der Kontrolltheorie ist es möglich, zusätzliche Informationen über das Systemverhalten eines makroökonometrischen Modells zu bekommen. Wir können bezüglich einer vorgegebenen Zielfunktion, die die Präferenzen des Entscheidungsträgers darstellt, eine optimale Regelung des Modells erreichen.

Die durchgeführten Untersuchungen sollen zeigen, wie sensitiv die Ergebnisse hinsichtlich der Spezifikation der zugrundegelegten Zielfunktion sind, wobei die durch das ökonometrische Modell gegebenen Nebenbedingungen als fest vorgegeben betrachtet werden.

Bei einer Variation des Planungshorizontes verändern sich die Optimalpfade der Ziel- und Instrumentvariablen in vergleichbaren Zeiträumen nur geringfügig; d. h. die Sensitivität der Lösungen auf eine Verlängerung des Optimierungszeitraumes ist beim hier verwendeten Chow-Algorithmus und dem Modell von Frowen und Arestis sehr gering. Dagegen hat die Auswahl der Zielpfade (d. h. der gewünschten vorgegebenen Sollwerte der Ziel- und Instrumentvariablen) einen weitaus größeren Einfluß hinsichtlich des Verlaufes der optimalen Lösungen als auch hinsichtlich des Zielerreichungsgrades. Werden Zeitpräferenzen des Entscheidungsträgers unterstellt, so zeigt sich, daß erst bei einer relativ großen positiven Wachstumsrate der Gewichte, insbesondere für die Anfangsperioden des Planungszeitraumes, beträchtliche Abweichungen der Optimalpfade von den entsprechenden Pfaden, die bei Konstanz der Gewichte im Zeitablauf abgeleitet werden, auftreten; während eine im Zeitablauf abnehmende Gewichtung sich nicht wesentlich von den Ergebnissen bei konstanter Gewichtung unterscheidet.

Unterschiedliche Präferenzen des Entscheidungsträgers hinsichtlich der Erreichung von Zielen lassen sich durch eine differenzierte Bewertung der einzelnen Zielvariablen deutlich machen. Weiterhin ermöglicht dieses Vorgehen, mit Hilfe alternativer Optimierungsläufe, einen trade-off hinsichtlich der Stabilisierung zweier Zielvariablen zu bestimmen. Es zeigt sich bei den hier durchgeführten Experimenten, daß eine gleichzeitige Stabilisierung des Bruttosozialprodukts und der Geldmenge bei konstanter Bewertung des Leistungsbilanzsaldos als drittes Ziel mit Hilfe der Fiskal- und Geldpolitik nicht durchführbar ist.

Durch eine Variation in der Gewichtung der Instrumentvariablen können wir versuchen, die Wirksamkeit alternativer politischer Maßnahmen auf bestimmte Zielvariablen aufzuzeigen. In unserem Falle beeinflussen die Staatsausgaben hauptsächlich das Bruttosozialprodukt, aber auch die Geldmenge; während bei der monetären Basis zu beobachten ist, daß sie fast ausschließlich auf die Geldmenge wirkt. Dieses Ergebnis hängt allerdings in starkem Maße von der Anzahl der Ziel- und Instrumentvariablen ab. Wird beispielsweise versucht, die drei Ziele, Bruttosozialprodukt, Geldmenge und Leistungsbilanzsaldo mit nur einem Instrument zu steuern, d. h. das jeweils andere Instrument geht als echt exogene Variable mit seinen historischen Werten in das System ein, so ergibt sich nicht die erwartete Ziel-Mittel-Kombination von Staatsausgaben auf das Bruttosozialprodukt und monetärer Basis auf Geldmenge. Erst wenn nur zwei Ziele, Bruttosozialprodukt und Geldmenge gesteuert werden sollen, stellt sich die erwartete Zuordnung wieder ein. Weiterhin liefern in diesem Fall die Staatsausgaben insgesamt gesehen eine bessere Stabilisierung als die monetäre Basis. Ein Ergebnis, das auf-

grund der kumulierten dynamischen Multiplikatoren des der gesamten Analyse zugrundeliegenden Modells (vgl. Tabelle 1) nicht unbedingt zu erwarten war.

Literaturverzeichnis

Arestis, P., S.F. Frowen und E. Karakitsos (1978), The Dynamic Impact of Government Expenditure and the Monetary Base on Aggregate Income: The Case of Four O.E.C.D. Countries, 1965-1974, Public Finance 33, 1-22.

Baum, C.F. (1980), On the Sensitivity of Optimal Control Solutions, Journal of Economic Dynamics and Control 2,205-208 .

Butters, E. H. und G. C. Chow (1977), Optimal Control of Nonlinear Systems Program, User's Guide, Econometric Research Program, Princeton University, Research Memo 209.

Chow, G.C. (1975), Analysis and Control of Dynamic Economic Systems, New York.

Chow, G.C. (1977), Usefullness of Imperfect Models for the Formulation of Stabilization Policies, Annals of Economic and Social Measurement 6, 175-187.

Franz, W., T. Kempf und H. Kräger (1984), Stabilisierungspolitik im Rahmen eines stochastischen Kontrollansatzes: eine empirische Analyse für die Bundesrepublik Deutschland, Beitrag in diesem Band.

Franz, W. und H. Kräger (1980), Zur Stabilisierung von Inflation und Beschäftigung: eine makroökonometrische und kontrolltheoretische Untersuchung für die Bundesrepublik Deutschland, Discussion Paper Nr. 146 des Institutes für Volkswirtschaftslehre und Statistik der Universität Mannheim.

Friedman, B. M. (1975), Economic Stabilization Policy: Methods in Optimization, Amsterdam.

Frohn, J. (1980), (Hrsg.), Methodik und Anwendung ökonometrischer Entscheidungsmodelle, Sonderheft zum allgemeinen statistischen Archiv, Heft 16, Göttingen.

Frommholz, H. (1984), Adaptive Entscheidungsmodelle, Beitrag in diesem Band.

Frommholz, H. und J. Wolters (1983), A Control-Theoretic Analysis for a Small Econometric Model of the Federal Republic of Germany, in: J. Gruber (Hrsg.), Econometric Decision Models, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 208, 116-130.

Frowen, S.F. und P. Arestis (1976), The Dynamic Impacts of Government Expenditure and the Monetary Base on Aggregate Income: The West German Case, 1965 to 1974, Kredit und Kapital 9, 368-383.

Gruber, J. (1980), Ökonometrische Entscheidungsmodelle für die Wirtschaftspolitik. Eine kurze Übersicht, in: H. Frohn (Hrsg.), Methodik und Anwendung ökonometrischer Entscheidungsmodelle, Sonderheft zum allgemeinen statistischen Archiv, Heft 16, Göttingen,7-34.

Gruber, J. (1983), (Hrsg.), Econometric Decision Models, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,Vol. 208.

Holly, S., B. Rüstem, J. H. Westcott, M.B. Zarrop und R. Becker (1979), Control Exercises with a Small Linear Model of the UK Economy, in: S. Holly, B.Rüstem und M.B. Zarrop (Hrsg.), Optimal Control for Econometric Models, London, 167-203.

Hughes-Hallett, A. (1979), The Sensitivity of Optimal Policies to Parametric and Stochastic Changes, in: S. Holly, B.Rüstem und M.B. Zarrop (Hrsg.), Optimal Control for Econometric Models, London, 134-164.

Kendrick, K.D. (1976), Applications of Control Theory to Macroeconomics, Annals of Economic and Social Measurement, 5, 171-190.

Kuhbier, P. (1980), Zur Abhängigkeit der optimalen Kontrollpfade von den Gewichtungen und den Zielwerten, in: J. Frohn (Hrsg.), Methodik und Anwendung ökonometrischer Entscheidungsmodelle, Göttingen, 35-56.

Kuhbier, P. (1981), Grundlagen der quantitativen Wirtschaftspolitik, Berlin.

Preston, A. J. und E. Sieper (1977), Policy Objectives and Instrument Requirements for a Dynamic Theory of Policy, in: J. D. Pitchford und S. J. Turnovsky (Hrsg.), Applications of Control Theory to Economic Analysis, Amsterdam, 215-253.

Rüstem, B., J. H. Westcott, M. B. Zarrop, S. Holly und R. Becker (1979), Iterative Respecification of the Quadratic Objective Function, in: S. Holly, B. Rüstem und M.B. Zarrop (Hrsg.), Optimal Control for Econometric Models, London,106-133.

Sandbloom, C. L. (1979), Some Sensitivity Aspects of Optimal Control Calculations for Economic Systems, Empirical Economics 4, 281-291.

Stöppler, S. und C. Deissenberg (1977), Quantitative Bestimmung und dynamische Bewertung optimaler wirtschaftspolitischer Entscheidungen, Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 133, 189-223.

Tinbergen, J. (1952), On the Theory of Economic Policy, Amsterdam.

STAATLICHE ALLOKATIONSPOLITIK IM MARKTWIRTSCHAFTLICHEN SYSTEM

Band 1 Horst Siebert (Hrsg.): Umweltallokation im Raum. 1982.

Band 2 Horst Siebert (Hrsg.): Global Environmental Resources. The Ozone Problem. 1982.

Band 3 Hans-Joachim Schulz: Steuerwirkungen in einem dynamischen Unternehmensmodell. Ein Beitrag zur Dynamisierung der Steuerüberwälzungsanalyse. 1981.

Band 4 Eberhard Wille (Hrsg.): Beiträge zur gesamtwirtschaftlichen Allokation. Allokationsprobleme im intermediären Bereich zwischen öffentlichem und privatem Wirtschaftssektor. 1983.

Band 5 Heinz König (Hrsg.): Ausbildung und Arbeitsmarkt. 1983.

Band 6 Horst Siebert (Hrsg.): Reaktionen auf Energiepreissteigerungen. 1982.

Band 7 Eberhard Wille (Hrsg.): Konzeptionelle Probleme öffentlicher Planung. 1983.

Band 8 Ingeborg Kiesewetter-Wrana: Exporterlösinstabilität. Kritische Analyse eines entwicklungspolitischen Problems. 1982.

Band 9 Ferdinand Dudenhöffer: Mehrheitswahl-Entscheidungen über Umweltnutzungen. Eine Untersuchung von Gleichgewichtszuständen in einem mikroökonomischen Markt- und Abstimmungsmodell. 1983.

Band 10 Horst Siebert (Hrsg.): Intertemporale Allokation. 1984.

Band 11 Helmut Meder: Die intertemporale Allokation erschöpfbarer Naturressourcen bei fehlenden Zukunftsmärkten und institutionalisierten Marktsubstituten. 1984.

Band 12 Ulrich Ring: Öffentliche Planungsziele und staatliche Budgets. Zur Erfüllung öffentlicher Aufgaben durch nicht-staatliche Entscheidungseinheiten. 1985.

Band 13 Ehrentraud Graw: Informationseffizienz von Terminkontraktmärkten für Währungen. Eine empirische Untersuchung. 1984.

Band 14 Rüdiger Pethig (Ed.): Public Goods and Public Allocation Policy. 1985.

Band 15 In Vorbereitung.

Band 16 Helga Gebauer: Regionale Umweltnutzungen in der Zeit. Eine intertemporale Zwei-Regionen-Analyse. 1985.

Band 17 Christine Pfitzer: Integrierte Entwicklungsplanung als Allokationsinstrument auf Landesebene. Eine Analyse der öffentlichen Planung der Länder Hessen, Bayern und Niedersachsen. 1985.

Band 18 Heinz König (Hrsg.): Kontrolltheoretische Ansätze in makroökonometrischen Modellen.1985.

Band 19 Theo Kempf: Theorie und Empirie betrieblicher Ausbildungsplatzangebote. 1985.